

النخبة السنية في الأصول الهندسية

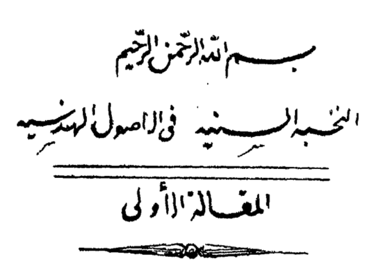
ترجمة

احمد افندي نجيب

طبعة ثالثة



بمطبعة المدارس الحربية
القاطنة الآن بالقبة بالقاهرة
سنة ١٣٠٢
هجرية



تعاريف

(١) كل جسم يشغل من الفراغ الغير المحدود محلاً معيناً وهذا المحل يسمى بحجم ذلك الجسم

(٢) سطح الجسم هو الحد الفاصل بينه وبين الفراغ المحيط به

(٣) ملتقى سطحي جسمين يسمى خطا

(٤) النقطة ملتقى خطين

(٥) الاحجام والسطوح والخطوط يمكن تصورها بدون واسطة الاجسام التي تتعلق هي بها

(٦) الاحجام والسطوح والخطوط تسمى اشكالاً

(٧) الغرض من الهندسة معرفة تقدير امتداد الاشكال والوقوف على خواصها

(٨) الخط المستقيم هو خط غير منته يتميز بكونه اقصر من غيره بين

اي نقطتين من نقطة

ومن الامور المسلمة انه لا يمكن ان يمد الا خط واحد مستقيم من اي نقطة الى اخرى وانه اذا اتحد جزآن من خطين مستقيمين يتحدان في جميع امتدادهما

(٩) الخط المنكسر او المضلعي هو خط مركب من خطوط مستقيمة

(١٠) كل خط ليس مستقيماً ولا مركباً من خطوط مستقيمة فهو خط منحن

(١١) المستوى سطح اذا اخذ فيه نقطتان بالاختيار ووصل بينهما خط مستقيم كان هذا الخط بتمامه في السطح

(١٢) كل سطح ليس مستوياً ولا مركباً من سطوح مستوية فهو سطح منحن

(١٣) الشكل الحادث من مستقيمين متقاطعين كالمستقيمين ا ب , ا ح يسمى زاوية والنقطة ا هي رأس الزاوية والخطان ا ب , ا ح هما ضلعاها والزاوية يبان تارة بحرف الرأس ا وتارة بثلاثة حروف هكذا ب ا ح او ح ا ب مع الاعتناء بوضع حرف الرأس في الوسط

والزاويتان المتساويتان هما زاويتان متى اوى يمكن تطبيق احداهما على الاخرى بمعنى انه لو فرض وضع الزاوية ا على الزاوية د مع تطبيق الضلع ا ب على د هـ واتجه حينئذ الضلع ا ح على الضلع د و لا يخرج بذلك اضلاع الزاويتين مع بعضها ويقال حينئذ ان الزاويتين المذكورتين متساويتان واي زاوية كالزاوية ا تكون ضعف زاوية اخرى كالزاوية د او ثلاثة امثالها او اربعة امثالها وهلم جرا اذا احتوت

بأن ضلعيها على زاويتين أو على ثلاثة زوايا أو أربع زوايا كل منها يساوي الزاوية ء وعلى ذلك فالزوايا تقبل المقارنة بعضها كالمقادير الاخرى

(١٤) متى تقابل مستقيم مثل اب مع مستقيم أخر مثل حء بحيث تكون الزاويتان المتجاورتان وهما ب ا ح , ب ا ء متساويتين فان الخط اب يقال له عمود على حء وكل من الزاويتين المتساويتين ب ا ح , ب ا ء تسمى زاوية قائمة

وسيبرهن فيما سيأتي على انه أي نقطة كالنقطة ا أخذت على مستقيم كالمستقيم حء يمكن ان يقام منها على هذا المستقيم عمود وعلى ان الزوايا القائمة كلها متساوية

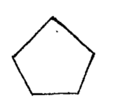
كل زاوية اكبر من الزاوية القائمة تسمى زاوية منفرجة وكل زاوية اصغر من الزاوية القائمة تسمى زاوية حادة

والزاويتان المكملتان لبعضهما هما زاويتان مجموعهما يساوي زاويتين قائمتين

والزاويتان المتممتان لبعضهما هما زاويتان مجموعهما يساوي قائمة واحدة

(١٥) الخطان المتوازيان هما خطان موجودان في مستو واحد اذا امتدا لا يلتقيان اصلاً وذلك كالخطين اب , حء

(١٦) الشكل المستوى هو مستوٍ محدود من جميع الجهات بخطوط



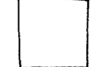
فاذا كانت تلك الخطوط مستقيمة فان المسافة المحصورة بينها تسمى شكلاً مستقيم الاضلاع أو مضلعاً والخطوط نفسها باجتماعها مع بعضها يحدث عنها ما يسمى محيط المضلع

(١٧) أبسط الاشكال المستقيمة الاضلاع ما كانت اضلاعه ثلاثة ويسمى مثلثاً كما ان كانت اضلاعه أربعة يسمى شكلاً رباعى الاضلاع أو رباعيا فقط وما كانت اضلاعه خمسة يسمى مخمساً وما كانت اضلاعه ستة يسمى مسدساً وهكذا

(١٨) المثلث المتساوى الاضلاع هو مثلث جميع اضلاعه متساوية والمثلث المتساوى الساقين هو مثلث فيه ضلعان متساويان فقط والمثلث المختلف الاضلاع هو مثلث جميع اضلاعه غير متساوية

(١٩) المثلث القائم الزاوية هو مثلث احدى زوياه قائمة والضلع المقابل للزاوية القائمة يسمى بالوتر وذلك كالمثلث ا ب ح فانه قائم الزاوية فى ا والضلع ب ح هو وتر القائمة

(٢٠) من الاشكال الرباعية تمتاز الاشكال الاتية وهى



المربع وهو ما كانت اضلاعه متساوية وزواياه قائمة

والمستطيل وهو ما كانت زواياه قائمة واضلاعه غير متساوية

ومتوازي الاضلاع وهو ما كانت اضلاعه المتقابلة متوازية

والمعين وهو ما كانت اضلاعه متساوية وزواياه غير قائمة

وشبه المنحرف وهو ما كان فيه ضلعان متوازيان فقط

(١) قطر المضلع خط مستقيم واصل بين رأسى زاويتين غير متجاورتين من زوايا المضلع

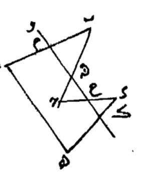
(٢) المضلع المتساوى الاضلاع ما كانت اضلاعه متساوية والمضلع المتساوى الزوايا ما كانت زواياه متساوية

(٣) المضلعات المتساويان فى الاضلاع هما ما كانت اضلاعهما متساوية كل لنظيره وموضوعة على ترتيب واحد بمعنى انه اذا صار اتباع محيطهما فى جهة واحدة فان المضلع الاول من احدهما يكون مساويا للضلع الأول من الآخر والضلع الثانى يساوى الضلع الثانى والضلع الثالث يساوى الضلع الثالث وهلم جرا وبمثل هذا يجرى الوقوف على معنى المضلعين المتساويين فى الزوايا

وفى كلتا الحالتين تسمى الاضلاع المتساوية بالاضلاع المتناظرة وتسمى الزوايا المتساوية بالزوايا المتناظرة

(٢٤) المضلع المحدب هو مضلع اذا مد ضلع ما من اضلاعه وجد المضلع بجملته في جهة واحدة من جهتي هذا المستقيم ومثاله المضلع ا ب ح د ه

ومحيط المضلع المحدب لايمكن ان يقطعه المستقيم في اكثر من نقطتين



لانه اذا قابل مستقيم مثل و ط محيط المضلع ا ب ح د ه في النقط م ، ه ، ع ، ك فان الضلع ب ح المقطوع بالمستقيم و ط في احدى النقط المتوسطة ه يكون في كل من جهتيه اجزاء من اجزاء المضلع

(٢٥) الشكلان المتساويان تجانسا كانا أو سطحيين أو خطيين هما شكلان يمكن تطبيق احدهما على الآخر بحيث يتحدان مع بعضهما اتحاداً تاماً

(تنبيه) الاربع مقالات الاول لايذكر فيها الا الاشكال المستوية أي المرسومة على سطح مستو

بيان الاصطلاحات والإشارات

الأمر المتعارف هو أمر واضح من نفسه لا يحتاج لدليل

والنظرية أمر حقيقي يتضح بواسطة دليل عقلي يسمى برهاناً

والمسألة أمر مطلوب يراد حله

والفائدة أمر حقيقي يستعمل واسطة اما للبرهنة على نظرية واما لحل مسئلة

والقضية اسم يطلق على النظرية والمسئلة والفائده

والنتيجة أمر يستنبط من قضيه او من جملة قضايا

والتنبيه عبارة توضيح بخصوص قضيه أو جملة قضايا تقدمت بقصد بيان

ارتباطها ببعضها أو منفعتها أو اقتصارها او غايتها

الامر المفروض هو أمر يعتمد اما في منطوق قضية أو في اثنا برهان

الاشارة = هي اشارة التساوى وعلى مقتضاها تكون العبارة ١ = ب

معناها ١ = ب

وللاستدلال على ان ١ أصغر من ب يكتب ١ < ب

وللاستدلال على ان ١ اكبر من ب يكتب ١ > ب

والاشارة + ينطق بها زايد وهي تدل على الجمع والاشارة − ينطق بها

ناقص وهي تدل على الطرح وعلى ذلك يدل ١ + ب على حاصل جمع الكميتين ١ و ب

ويدل ١ − ب على باقي طرح هاتين الكميتين او على ما يبقى من بعد طرح ب من ١

وايضاً ١ − ب + ج أو ١ + ج − ب معناه انه يجب جمع ١ و ج على بعضهما

وطرح ب من المجموع

والاشارة × تدل على الضرب وعلى مقتضاها يدل ١ × ب على حاصل ضرب

١ × ب وتستعوض الاشارة × احياناً بنقطه بحيث ان ١ . ب و ١ × ب

معناهما واحد ويبين حاصل الضرب عينه ايضاً من غير اشارة متوسطة

بين عامليه بحيث يكتب هكذا ١ ب اعا لا يلزم استعمال هذه

العبارة الا عند عدم استعمالها في آن واحد لبيان الخط ١ ب الذي

٢ م بلاشى

هو بعد النقطتين ا، ب

والعبارة ا × (ب + ح – د) تدل على حاصل ضرب ا في الكمية ب + ح – د
واذ الزم الأمر لضرب ا + ب في ا – ب + ح يبين حاصل الضرب هكذا
(ا + ب) × (ا – ب + ح) وكلما وجد بين القوسين يعتبر كمية واحدة
وأي عدد وضع قبل خط أو قبل كمية يستعمل عاملاً لهذا الخط أو لهذه الكمية
وعلى ذلك لاجل الدلالة على ان الخط اب مكرر ثلاث مرات يكتب هكذا
٣ اب ولاجل بيان نصف الزاوية ا يكتب ½ ا
ومربع الخط اب يبين هكذا اب² ومكعبه يبين هكذا اب³ وسيبين
المعنى المضبوط لمربع خط أو مكعبه عند حلوله في محله

والاشارة √ تدل على جذر يلزم استخراجه فعلى مقتضاها يكون √ ٢
هو الجذر التربيعي للعدد ٢ ويكون √ ا × ب هو جذر حاصل الضرب ا × ب
أو هو الوسط المتناسب بين ا و ب

القضية الأولى

نظرية

أي نقطة أخذت على مستقيم يمكن أن يقام منها عمود على هذا المستقيم ولا يمكن ان
يقام عليه منها الا عمود واحد.

وذلك لانه اذا فرضنا ان مستقيماً مثل ءء كان منطبقاً على مستقيم آخر مثل
اب ثم دار حول النقطة ح فانه يكون مع اب زاويتين متجاورتين

ا ح د , د ح ب احداها وهى ا ح د تكون فى الابتدا صغيرة جدًا ثم تأخذ فى التزايد دائمًا والاخرى وهى د ح ب تكون فى الابتدا اكبر من ا ح د ثم تأخذ فى التناقص دائمًا حتى تنتهى الى الصفر

ومن ذا يرى ان الزاوية ا ح د التى كانت فى الابتدا اصغر من د ح ب تصير اكبر من هذه الزاوية فعلى هذا يوجد وضع ح د من أوضاع المستقيم المتحرك تكون فيه هاتان الزاويتان متساويتين ومن البديهى ان هذا الوضع منفرد لا وجود لغيره

(نتيجة) الزوايا القائمة كلها متساوية

أى اذا كان المستقيم د ح عمودًا على ا ب وكان المستقيم ع ر عمودًا على هـ و

فان الزاوية ا ح د تكون مساوية للزاوية هـ رع

وذلك لانه اذا وضع المستقيم هـ و على ا ب بحيث تقع النقطة ر فى ح فان رع يأخذ اتجاه ح د والا لامكن اقامة عمودين على هذا المستقيم من نقطة واحدة مأخوذة عليه

القضية الثانية

نظرية

كل مستقيم مثل ح د قابل مستقيمًا آخر مثل ا ب أحدث معه زاويتين

متجاورتين احد ، دحب مجموعهما يساوي زاويتين قائمتين

لانه اذا اقيم العمود حه على اب من النقطة ح فان الزاوية احد تكون كناية عن مجموع الزاويتين احه ، هحد وعلى هذا يكون احد + دحب عبارة عن مجموع الثلاث زوايا احه ، هحد ، دحب

ومن حيث ان الاولى من هذه الزوايا قائمة وان مجموع الزاويتين الاخريين كناية عن الزاوية القائمة هحب فمجموع الزاويتين احد ، دحب يكون مساويًا لزاويتين قائمتين

(نتيجة ١) اذا كانت احدى الزاويتين احد ، دحب قائمة فان الاخرى تكون كذلك

(نتيجة ٢) اذا كان المستقيم ده عمودًا على اب فان اب يكون بالعكس عمودًا على ده

لانه من حيث ان ده عمود على اب تكون الزاوية احد مساوية لمجاورتها دحب وكل منهما تكون قائمة لكن حيث ان الزاوية احد قائمة فالزاوية احه المجاورة لها تكون قائمة ايضًا وعلى ذلك تكون الزاوية احه = احد وبذا يكون اب عمودًا على ده

(نتيجة ٣) جميع الزوايا المتعاقبة بحا ، حاد ، داه ، هاو المتكونة

في جهة واحدة من المستقيم ب ه باجتماعها مع بعضها تساوي زاويتين قائمتين لان مجموعها يساوي مجموع الزاويتين المتجاورتين ب ا ح و ح ا و

القضية الثالثة

نظرية

اذا كان مجموع الزاويتين المتجاورتين ا ح ء , ء ح ب مساويا للزاويتين قائمتين فان ضلعيهما الخارجيان ح ا , ح ب يكونان على خط مستقيم واحد

لانه ان لم يكن ح ب على امتداد ا ح بل كان الذي على امتداد ه هو الخط ح ه فان الخط ا ح ه يصير خطا مستقيما وبذا يكون مجموع الزاويتين ا ح ء , ء ح ه مساويا للزاويتين قائمتين (قضية ٢) وبالفرض مجموع الزاويتين ا ح ء , ء ح ب يساوي قائمتين ايضا فعلى ذلك يكون ا ح ء + ء ح ب = ا ح ء + ء ح ه فاذا طرحت الزاوية ا ح ء من كل من الطرفين كانت الزاوية ء ح ب = ء ح ه وهو محال فمن اجل ذلك يكون ح ب على امتداد ا ح

القضية الرابعة

نظرية

اذا تقاطع مستقيمان مثل ا ب , ء ه فكل زاويتين متقابلتين برأسيهما

تكونان متساويتين

لانه من حيث ان الخط ده مستقيم فان مجموع الزاويتين اجد , اجه يكون مساويا لقائمتين ومن حيث ان الخط اب مستقيم يكون مجموع الزاويتين اجه , بجه مساويا لقائمتين ايضا وعلى ذلك يكون اجد + اجه = اجه + بجه فاذا طرحت الزاوية اجه من الطرفين كانت الزاوية اجد مساوية للزاوية بجه المقابلة لها بالرأس

وبمثل هذا يبرهن على ان الزاوية اجه تساوي مقابلتها بجد

(تنبيه) مجموع الاربع زوايا المتكونة حول نقطة بمستقيمين متقاطعين يساوي اربع زوايا قائمة لان مجموع الزاويتين اجه , بجه يساوي زاويتين قائمتين وكذا مجموع الزاويتين اجد , بجد

وعلى العموم اذا تقابل عدد ما من المستقيمات في نقطة مثل ج فان مجموع الزوايا المتعاقبة

اجب , بجد , دجه , هجو , وجا

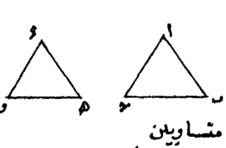
يكون مساويا لاربع زوايا قائمة لانه اذا صار تشكيل اربع زوايا قائمة في النقطة ج بمستقيمين متعامدين فمن البديهي ان مجموعها يكون مساويا للزوايا المتعاقبة المذكورة

القضية الخامسة

نظرية

اذا ساوى ضلعان والزاوية المنحصرة بينهما من مثلث ضلعين والزاوية المنحصرة

بينهما من مثلث آخر كل لنظيره كان المثلثان متساويين



أى اذا فرض ان الضلع اب = ده وان الضلع اح = دو وان الزاوية ا = د فان المثلثين ابح , دهو يكونان متساويين

وذلك لانه يمكن وضع أحد هذين المثلثين على الآخر بحيث يتحدان مع بعضهما اتحادا كليا فاذا وضع الضلع ده فى مبدء الأمر على مساويه اب فان النقطة د تقع فى ا والنقطة ه تقع فى ب وحيث ان الزاوية د تساوى الزاوية ا فمتى وضع الضلع ده على اب يأخذ الضلع دو اتجاه اح وحيث ان دو = اح تقع النقطة و فى ح والضلع الثالث هو يقع بالضبط على الضلع الثالث بح وحينئذ يكون المثلث دهو مساويا للمثلث ابح

(نتيجه) من كون الزاوية ا = د والضلع اب = ده والضلع اح = دو يستنتج ان الزاوية ب = ه والزاوية ح = و والضلع بح = هو .

القضية السادسة

نظريه

اذا ساوى ضلع والزاويتان المجاورتان له من مثلث ضلعا والزاويتين المجاورتين له من مثلث آخر كل لنظيره كان المثلثان متساويين

اى اذا فرض ان الضلع بح يساوى الضلع هو وان الزاوية ب تساوى الزاوية ه

وان الزاوية ح تساوى الزاوية و فان المثلثين ا ب ح , ء هـ و يكونان متساويين

لانه اذا وضع هـ و على مساويه ب ح بقصد تطبيق المثلثين على بعضهما فان النقطة هـ تقع فى ب والنقطة و تقع فى ح وحيث ان الزاوية هـ تساوى الزاوية ب فالضلع هـ ء يأخذ اتجاه ب ا وبذا توجد النقطة ء على نقطة من نقط الخط ا ب وايضاً من حيث ان الزاوية و تساوى الزاوية ح فالخط و ء يأخذ اتجاه ح ا والنقطة ء توجد فى نقطة من نقط الضلع ح ا وعلى ذلك فالنقطة ء الواجب وجودها على الخطين ب ا , ح ا فى آن واحد تقع على نقطة تقاطعهما وهى ا وبذا يتحد المثلثان ا ب ح , ء هـ و مع بعضهما ويصيران متساويين

(نتيجه) من كون الضلع ب ح = هـ و والزاوية ب = هـ والزاوية ح = و يستنتج ان الضلع ا ب = ء هـ وان الضلع ا ح = ء و وان الزاوية ا = ء

القضية السابعة
نظرية

أى ضلع من اضلاع أى مثلث أصغر من مجموع الضلعين الأخرين

لان الخط المستقيم ب ح مثلاً اقصر بعد بين النقطتين ب , ح (تعريف ٨) فعلى ذلك يكون ب ح اصغر من ا ب + ا ح

ويجب الالتفات أيضاً لكون أى ضلع اكبر من فرق الضلعين الاخرين

لانه اذا فرض أن د اكبر الاضلاع وان ه ، و هما الضلعان الأخران فانه بطرح و من طرفي المتباينة د < ه + و ينتج المتباينة د - و < ه وبطرح ه ينتج د - ه < و

القضية الثامنة

نظرية

اذا أخذت نقطة مثل و داخل مثلث مثل ا ب حـ ووصل بينها وبين نهايتي اى ضلع مثل ب حـ مستقيمان و ب ، و حـ فان مجموع هذين المستقيمين يكون اصغر من مجموع الضلعين الآخرين ا ب ، ا حـ

لانه اذا مد ب و حتى يقابل الضلع ا حـ في د فان الخط المستقيم و حـ يكون أصغر من و د + د حـ (قضية ٧) فاذا اضيف ب و لكل من الطرفين يحدث ب و + و حـ < ب و + و د + د حـ أو

ب و + و حـ < ب د + د حـ

وبمثل ذلك يحدث ب د < ب ا + ا د فاذا اضيف د حـ لكل من الطرفين يحدث ب د + د حـ < ب ا + ا حـ وحيث قد وجدنا ب و + و حـ < ب د + د حـ فمن باب اولى يكون ب و + و حـ < ب ا + ا حـ

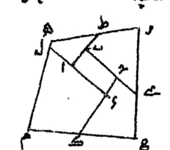
القضية التاسعة

نظرية

كل خط مضلعى محدب مثل ا ب حـ د يكون أصغر من أى خط آخر محيط به من جميع الجهات مثل م ه و ع

٤ م هـ احمد نجيب

برهانه ان تمد اضلاع الشكل ا ب ح ء في جهة واحدة حتى تتقابل مع الخط المحيط فتحدث المتباينات الآتية وهي



ا ب + ب ط < ا ل + ل ه + ه ط

و ب ح + ح ى < ب ط + ط و + و ى

و ح ء + ء ك < ح ى + ى ع + ع ك

و ء ا + ا ل < ء ك + ك م + م ل

فاذا اضيفت هذه المتباينات على بعضها طرفا بطرف وحذفت الأجزاء المشتركة بين الطرفين يحدث ا ب + ب ح + ح ء + ء ا < ه و + و ع + ع م + م ه

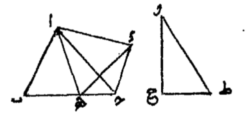
ويبرهن بمثل ذلك على ان كل خط مضلعي محدب أصغر من اى خط محيط به متحد معه في النهايتين

(تنبيه) النظرية المتقدمة انما هي حالة خصوصية من هذه النظرية

القضية العاشرة

نظرية

اذا ساوى ضلعان من مثلث ضلعين من مثلث آخر كل لنظيره وكانت الزاوية المنحصرة بين الضلعين الاولين اكبر من الزاوية المنحصرة بين الضلعين الآخرين فان الضلع الثالث من المثلث الاول يكون اكبر من الضلع الثالث من المثلث الثاني



أى اذا كان ا ب = و ع , ا ح = و ط في المثلثين ا ب ح , و ط ع وكانت الزاوية ب ا ح > ع و ط فان

الضلع ب د يكون اكبر من الضلع ح ط.

برهانه ان تنشا زاوية د ا ى = ح و ط ويجعل ا ى = ح و ثم يوصل د ى فالمثلثان ا د ى , ح و ط يكونان متساويين لان فيهما زاويتين متساويتين محصورتين بين اضلاع متساويه ومن حينئذ يكفي ان يبرهن على ان ب د > د ى

ولذا تقسم الزاوية ب ا ى الى قسمين متساويين بالمستقيم اهـ فهذا المستقيم يقع في الزاوية الكبرى ب ا د ثم يوصل الخط ى هـ فالمثلثان ب ا هـ , هـ ا ى يكونان متساويين لان فيهما زاويتين متساويتين محصورتين بين اضلاع متساويه ومن تساوي هذين المثلثين يكون ب هـ = هـ ى لكن المثلث هـ ى د فيه د ى < هـ ى + هـ د فاذا وضع ب هـ عوضا عن هـ ى يكون د ى < ب هـ + هـ د أي د ى < ب د

واذا بالعكس كان الضلعان ا ب , ا د من المثلث ا ب د مساويين للضلعين و ح , و ط من المثلث و ح ط وكان الضلع الثالث ب د من المثلث الاول اكبر من الضلع الثالث ح ط من المثلث الثاني فان الزاوية ب ا د تكون اكبر من الزاوية ح و ط

لانه اذا كانت الزاوية ب ا د < ح و ط فعلى ما تقدم يكون د ب < ح ط وهو بخلاف الغرض واذا كانت الزاوية ب ا د مساوية ح و ط يكون د ب = ح ط (قضية ٥) وهو بخلاف الغرض ايضاً

القضية الحادية عشر
نظرية

المثلثان يكونان متساويين متى تساوت اضلاعهما على التناظر

اى اذا كان الضلع اب = ده , اح = دو , ب ح = ه و فان الزاوية ا = د , ب = ه , ح = و

لانه اذا كانت الزاوية ا اكبر من الزاوية د فلداعى كون الضلعين اب , اح مساويين بالتناظر للضلعين ده , دو يلزم على مقتضى النظرية المتقدمة ان يكون الضلع ب ح > ه و واذا كانت الزاوية ا أصغر من الزاوية د يلزم ان يكون الضلع ب ح أصغر من ه و مع ان ب ح = ه و فعلى ذلك لاتكون الزاوية ا اكبر من الزاوية د ولا أصغر منها بل تكون مساوية لها وبمثل هذا يبرهن على أن الزاوية ب = ه وعلى ان الزاوية ح = و

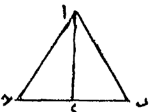
(تنبيه) يقتضى التنبه لكون الزوايا المتساوية مقابلة للأضلاع المتساوية فالزاويتان المتساويتان ا , د مثلاً مقابلتان للضلعين المتساويين ب ح , ه و

القضية الثانية عشر
نظرية

فى أى مثلث متساوى الساقين الزاويتان المقابلتان للساقين متساويتان

اى اذا كان الضلع اب = اح فان الزاوية ح تكون مساوية للزاوية ب

لانه اذا وصل الخط ا ء بين الرأس ا والنقطة ء التى هى منتصف



القاعدة ب ح كانت أضلاع المثلثين ا ب ء , ا ء ح متساوية على التناظر اذا الضلع ا ء مشترك بين المثلثين والضلع ا ب = ا ح بالفرض , ب ء = ء ح بالعمل فعلى مقتضى النظرية المتقدمة تكون الزاوية ب مساوية للزاوية ح

(نتيجة) المثلث المتساوى الاضلاع يكون متساوى الزوايا أيضاً بمعنى أن زواياه تكون متساوية

(تنبيه) ينتج من تساوى المثلثين ا ب ء , ا ح ء ان الزاوية ب ا ء = ء ا ح وان الزاوية ب ء ا = ا ء ح وعلى ذلك تكون هاتان الزاويتان الأخيرتان قائمتين ومن ذا يعلم ان الخط الواصل من رأس المثلث المتساوى الساقين الى منتصف قاعدته يكون عموداً على هذه القاعدة وقاسماً زاوية الرأس الى قسمين متساويين

فى المثلث الغير المتساوى الساقين تجعل قاعدته ضلعاً حيثما اتفق من اضلاعه وحينئذ تكون رأسه هى رأس الزاوية المقابلة للضلع المتخذ قاعدة واما فى المثلث المتساوى الساقين فان ضلعه الذى دون الساقين يتخذ بالخصوص قاعدة له

الفضية الثالثة عشر
نظرية

اذا (بعكس النظرية المتقدمة) تساوى زاويتان من مثلث فان الضلعين المقابلين لهما يكونان متساويين ويكون المثلث متساوى الساقين

أى اذا كانت الزاوية ا ب حـ = ا حـ ب فان الضلع ا حـ يكون مساويًا للضلع ا ب

لانه ان لم يكن هذان الضلعان متساويين لكان أحدهما ا ب مثلاً اكبر من الاخر فاذا أخذ ب ء = ا حـ ووصل ء حـ فلداعى ان الزاوية ء ب حـ = ا حـ ب بالفرض والضلعان ء ب , ب حـ مساويان للضلعين ا حـ و حـ ب بالتناظر يكون المثلث ء ب حـ مساويًا للمثلث ا حـ ب لكن الجزء لا يمكن مساواته للكل فعلى ذلك يلزم ان يكون الضلعان ا ب , ا حـ متساويين وبذا يكون المثلث ا ب حـ متساوى الساقين

القضية الرابعة عشر

نظرية

فى كل مثلث الزاوية الكبرى يقابلها الضلع الاكبر وبالعكس اى الضلع الاكبر تقابله الزاوية الكبرى

(الامر الأول) اذا كانت الزاوية حـ > ب كان الضلع ا ب المقابل للزاوية حـ اكبر من الضلع ا حـ المقابل للزاوية ب

لانه اذا أخذت زاوية ب حـ ء = ب فالمثلث ب ء حـ يكون فيه ب ء = ء حـ (قضية ١٣) لكن الخط المستقيم ا حـ < ا ء + ء حـ , ا ء + ء حـ = ا ء + ء ب

= ا ب فعلى ذلك يكون ا ب > ا ح

(الأمر الثانى) اذا كان الضلع ا ب > ا ح كانت الزاوية ح المقابلة للضلع ا ب اكبر من الزاوية ب المقابلة للضلع ا ح

لانه اذا كانت ح < ب فعلى مقتضى ما سبق يكون ا ب < ا ح وهو بخلاف الفرض واذا كانت ح = ب كان ا ب = ا ح (قضية ١٣) وهو بخلاف الفرض أيضاً فمن ذلك يلزم أن تكون الزاوية ح اكبر من الزاوية ب

القضية الخامسة عشر

نظرية

أى نقطة فرضت خارج خط مستقيم لا يمكن ان ينزل منها على هذا المستقيم الا عمود واحد لانه لو امكن تنزيل عمودين مثل ا ه , ا ب على د ى من النقطة ا ومد احدهما ا ه بكمية ه اَ = ا ه ووصل اَ ب فان المثلث ا ه ب يكون مساوياً للمثلث اَ ه ب لان الزاويتين ا ه ب , اَ ه ب قائمتان والضلع ا ه = اَ ه والضلع ب ه مشترك بين المثلثين ومن ذا ينتج ان الزاوية ا ب ه = ه ب اَ وحيث ان الزاوية ا ب ه قائمة فتكون الزاوية ه ب اَ قائمة أيضاً لكن اذا كان مجموع الزاويتين المتجاورتين ا ب ه , ه ب اَ مساوياً زاويتين قائمتين يلزم أن يكون الخط ا ب اَ مستقيماً ومنه ينتج انه يمكن وصل مستقيمين بين النقطتين ا , اَ وهو محال فعلى ذلك لا يمكن أن ينزل

على حـ ء من النقطة ا الا عمود واحد

القضية السادسة عشر

نظرية

اذا اخذت نقطة مثل ا خارج مستقيم مثل ء هـ وانزل منها العمود ا ب على هذا المستقيم ثم مد منها جملة موائل على هذا المستقيم نفسه مثل ا هـ ، ا حـ ، ا ء

فاولاً العمود ا ب يكون أقصر من كل مائل

وثانياً المائلات ا حـ ، ا هـ الممتدان في جهتي العمود على بعدين متساويين ب حـ ، ب هـ يكونان متساويين

وثالثاً كل مائلين مثل ا حـ ، ا ء أو مثل ا هـ ، ا ء امتدا حيثما يراد يكون ابعدهما عن العمود اطولهما

لنمد العمود ا ب بكمية ب و = ب ا ونوصل و حـ ، و ء

فأولاً المثلث ب حـ و يساوي المثلث ب حـ ا لان الزاوية القائمة حـ ب و = حـ ب ا والضلع حـ ب مشترك بين المثلثين والضلع ب و = ب ا فعلى مقتضى القضية الخامسة يكون الضلع الثالث حـ و مساوياً للضلع الثالث ا حـ وحيث ان ا ب و خط مستقيم فيكون أصغر من الخط المنكسر ا حـ و وعلى هذا يكون ا ب الذي هو نصف ا ب و أصغر من ا حـ الذي هو نصف ا حـ و وبذا يثبت

ان العمود أقصر من كل مائل

وثانيًا اذا فرض ب ه = ب د كان المثلث ا ه ب مساويًا للمثلث ا ب د (قضية ٥) لان الضلع ا ب مشترك بينهما والضلع ب ه = ب د بالفرض والزاوية ا ب ه = ا ب د فعلى ذلك يكون الضلعان ا ه و ا د متساويين وبذا يثبت ان المائلين المتساويي البعد عن العمود متساويان

وثالثًا مجموع الخطين ا د و د و في المثلث ء و ا أصغر من مجموع الضلعين ا ء و ء و (قضية ٨) فعلى ذلك يكون ا د الذي هو نصف الخط ا د و أصغر من ا ء الذي هو نصف ا ء و وبذا يثبت ان المواثل التي بعدها عن العمود اكبر تكون اكبر

(نتيجه ١) العمود يدل على البعد الحقيقي بين اى نقطة ومستقيم اذ هو أقصر من كل مائل

(نتيجه ٢) لا يمكن أن يمد من نقطة واحدة الى مستقيم واحد ثلاث مستقيمات متساوية لانه لو امكن ذلك لوجد مائلان متساويان في جهة واحدة من العمود وهو محال

القضية السابعة عشر

نظرية

اذا نصف مستقيم مثل ا ب بالنقطة د واقيم منها العمود ه و على هذا المستقيم فان كل نقطة من نقط العمود تكون على بعدين متساويين من نهايتي الخط ا ب

وثانياً كل نقطة خارجة عن العمود تكون على بعدين مختلفين من النهايتين ا , ب

(برهان ذلك) أولاً من حيث قد فرض أن ا ﺣ = ﺣ ب فان المائلين ا د , د ب يكونان متباعدين عن العمود ببعدين متساويين وبذا يكونان متساويين ويكون الأمر كذلك بالنسبة للمائلين ا ﻫ , ﻫ ب وبالنسبة للمائلين ا و , و ب وهكذا وبذا يثبت ان كل نقطة من نقط العمود تكون متباعدة ببعدين متساويين عن النهايتين ا , ب

وثانياً لتكن ى نقطة خارجة عن العمود فاذا وصل ى ا , ى ب فان أحد هذين الخطين يقطع العمود فى د واذا وصل د ب يكون د ب = د ا لكن الخط المستقيم ى ب أصغر من الخط المنكسر ى د + د ب , ى د + د ب = ى د + د ا = ى ا

فعلى ذلك يكون ى ب < ى ا وبذا يثبت ان كل نقطة خارجة عن العمود تكون على بعدين مختلفين من النهايتين ا , ب

(تنبيه) يخصص اسم المحل الهندسى بكل خط جميع نقطه متمتعة بخاصية واحدة لا يشترك فيها النقط الاخرى من المستوى

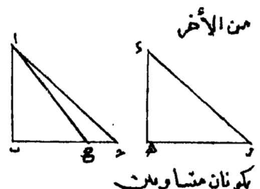
فعلى هذا يكون المستقيم ﻫ و هو المحل الهندسى للنقط التى بعد كل منها عن النقطتين ا , ب متساويان

القضية الثامنة عشر

نظرية

المثلثان القائما الزاوية يكونان متساويين متى تساوى وتر وضلع من أحدهما لنظيريهما

من الآخر



أى اذا فرض فى المثلثين ا ب ح ، ء ه و القائمى الزاوية ان الوتر ا ح = ء و وان الضلع ا ب = ء ه فان المثلثين المذكورين يكونان متساويين

لانه لو ثبت تساوى الضلع الثالث ب ح لنظيره ه و لاتضح تساوى المثلثين فاذا فرض ان هذين الضلعين غير متساويين بان كان ب ح مثلاً اكبرهما يؤخذ ب ج = ه و ويوصل ا ج فالمثلث ا ب ج يصير مساويًا للمثلث ء ه و لان الزاوية القائمة ب تساوى الزاوية القائمة ه والضلع ا ب = ء ه والضلع ب ج = ه و فعلى مقتضى القضية الخامسة يكون هذان المثلثان متساويين واذن يكون ا ج = ء و وحيث ان ء و = ا ح بالفرض فيكون ا ج = ا ح لكن على مقتضى القضية السادسة عشر لا يمكن ان يكون المائل ا ح مساويًا ا ج حيث ان بعده عن العمود ا ب اكبر فعلى ذلك لا يمكن ان يكون ب ح مختلفًا عن ه و فى المقدار بل يكون مساويًا له وبذا يكون المثلث ا ب ح مساويًا للمثلث ء ه و

القضية التاسعة عشر

نظرية

المثلثان القائما الزاوية يكونان متساويين اذا ساوى وتر وزاوية حادة من احدهما لنظيريهما من الآخر

ليكن اح = ءو والزاوية ا = ء فاذا وضع المثلث ءهو على اىح مع تطبيق ءو على اح فمن حيث ان الزاوية ء = ا يأخذ ءه اتجاه اى وفى آن واحد يأخذ وه اتجاه حى والا لامكن تنزيل عمودين على اى من ح ومن ذلك تقع النقطة ه فى ى وبهذا يتحد المثلثان مع بعضهما اتحادًا تامًا

القضية العشرون

نظرية

كل نقطة مثل م أخذت على منصف زاوية مثل ىاء يكون بعداها عن ضلعى هذه الزاوية متساويين (منصف زاوية ما هو المستقيم الذى يقسم هذه الزاوية الى قسمين متساويين)

وكل نقطة مثل م أخذت فى الزاوية ىاء وكان بعداها عن الضلعين اى واء متساويين توجد على منصف هذه الزاوية

(برهان الامر الاول) ان ينزل من النقطة م عمودان م ء , م ح على اء , اى بالتناظر فالمثلثان م اء , م اح القائما الزاوية يكونان متساويين لان الوتر ام مشترك بينهما والزاويتان م اء , م اح متساويتان بالفرض فعلى ذلك يكون م ء = م ح

(برهان الأمر الثانى) اذا بالعكس كان العمودان م ى ، م ح متساويين
فان المثلثين م ا ى ، م ا ح القائمى الزاوية يكونان متساويين أيضًا لان
الوتر م ا مشترك بينهما والضلعان م ى ، م ح متساويان بالفرض
فعلى ذلك تكون الزاوية م ا ى = م ا ح
ومن هنا ينتج ان كل نقطة اخذت فى الزاوية ب ا ى خارج المنصف ا م يكون
بعداها عن ضلعى الزاوية غير متساويين
(تنبيه) منصف زاوية هو المحل الهندسى للنقط الداخلة فى هذه الزاوية التى
يكون بعدا كل منها عن ضلعى الزاوية متساويين

نظريات المستقيمات المتوازية

القضية الحادية والعشرون

نظرية

المستقيمان ا ح ، ب ى العمودان على مستقيم واحد ح ى يكونان متوازيين
لانهما ان تلاقيا فى نقطة مثل م لامكن
تنزيل عمودين من هذه النقطة على ح ى

القضية الثانية والعشرون
نظرية

كل نقطة يمكن أن يمد منها مستقيم يوازى مستقيماً معلوماً

لانه اذا انزل العمود ا ب من النقطة ا على ب ه ومد من النقطة عينها العمود ا د على ا ب فان المستقيمين ا د , ب ه يكونان عمودين على ا ب وبذا يكونان متوازيين

ومن القضايا المسلمة من غير برهان انه لا يمكن ان يمد من النقطة ما الا مستقيم واحد يوازى آخر

القضية الثالثة والعشرون
نظرية

اذا توازى مستقيمان مثل ا ب , ه د فان كل مستقيم عمود على احدهما ا ب مثل و ح يكون عموداً على الآخر ه د

لان البديهى أولاً ان و ح يقابل ه د اذ يترتب على خلاف ذلك امكان مد موازيين للمستقيم ه د من النقطة و

واما كون ه د عموداً على و ح فلانه ان كان مائلاً عليه امكن ان يقام عمود على و ح من النقطة ح وهذا العمود يكون موازياً للمستقيم ا ب وبذا يمكن

وجود مستقيمين مارين بالنقطة ع وكل منهما يوازي ا ب

القضية الرابعة والعشرون

نظرية

المستقيمان ا ب و حـ ء الموازيان لثالث هـ و يكونان متوازيين

لانه لو تقابل المستقيمان ا ب , حـ ء في نقطة مثل م لامكن مد موازيين للمستقيم هـ و من النقطة م

تعاريف

اذا قطع مستقيمان مثل ا ب و حـ ء بقاطع مثل هـ و وجد في نقطتي التقاطع وهما ع و ط ثمان زوايا

فالاربع زوايا (١) , (٤) , (٥) , (٨) المحصورة بين المستقيمين ا ب و حـ ء تسمى زوايا داخلة والاربع زوايا الاخر تسمى زوايا خارجة

وكل زاويتين وجدتا في جهتين مختلفتين بالنسبة للقاطع وكانتا داخلتين غير متجاورتين مثل (١) , (٥) تسميان زاويتين متبادلتين داخلتين

وكل زاويتين مثل (٨) , (٢) وجدتا في جهة واحدة من القاطع وكانت احداهما داخلة والاخرى خارجة ولم تكونا متجاورتين تسميان زاويتين متناظرتين

ثم ان كل زاويتين وجدنا في جهتين مختلفتين بالنسبة للقاطع وكانتا خارجتين غير متجاورتين مثل (٧) و (٦) تسميان زاويتين متبادلتين خارجتين

القضية الثامنة والعشرون

نظرية

اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين

فأولاً كل زاويتين متبادلتين داخلتين تكونان متساويتين

وثانياً كل زاويتين متبادلتين خارجتين تكونان متساويتين

وثالثاً كل زاويتين متناظرتين تكونان متساويتين

ورابعاً كل زاويتين داخلتين موجودتين في جهة واحدة من القاطع يكون مجموعهما يساوي زاويتين قائمتين

(الأمر الاول) ليكن اب و حد مستقيمين متوازيين مقطوعين بالقاطع ع ط

فاذا انزل العمود ى م على اب من النقطة ى التي هي منتصف هو فانه يكون عموداً أيضاً على حد والمثلثان م ى ه و ن ى و القائما الزاوية يكونان متساويين لان الوترين ه ى و ى و متساويان بالعمل والزاويتان م ى ه و ن ى و متساويتان لتقابلهما بالرأس ومن تساوي هذين المثلثين ينتج تساوي الزاويتين المتبادلتين الداخلتين م ه ى و ن و ى

ومن ذا يرى ان الزاويتين ب هـ و , هـ و د متساويتان لان كل واحدة منهما مكملة لاحدى الزاويتين م هـ ب , ب هـ و

(الأمر الثاني) الزاويتان المتبادلتان الخارجتان ح هـ ب , د و ط متساويتان لانهما مقابلتان برأسيهما للزاويتين المتبادلتين الداخلتين م هـ ب , ب هـ و

(الامر الثالث) الزاويتان المتناظرتان ح هـ ب , هـ و د متساويتان لان
ح هـ ب = ا هـ و , ا هـ و = هـ و د

(الامر الرابع) مجموع الزاويتين ب هـ و , هـ و د يساوي زاويتين قائمتين لان
ب هـ و + ا هـ و = ٢ ق , ا هـ و = هـ و د

القضية السادسة والعشرون
نظرية

اذا (بعكس النظرية المتقدمة) أحدث قاطع مع مستقيمين زاويتين متبادلتين داخلتين متساويتين او زاويتين متبادلتين خارجتين متساويتين أو زاويتين متناظرتين متساويتين أو زاويتين داخلتين في جهة واحدة من القاطع مجموعهما يساوي زاويتين قائمتين فان المستقيمين المذكورين يكونان متوازيين

(الأمر الأول) ليكن اب , حد مستقيمين مقطوعين بالقاطع ح ط فاذا كانت الزاويتان المتبادلتان الداخلتان ا هـ و , هـ و د متساويتين فان اب يكون موازيا حد

ح هـ ك ا ب د و ط ح د

لانه ان لم يكن موازيًا له امكن أن يمد من ه مستقيم ه ل يوازي حـ ء وحينئذٍ تكون الزاويتان ل ه و , ه و ء متساويتين لانهما متبادلتان داخلتان وحيث أن الزاوية ا ه و = ه و ء بالفرض تكون الزاوية ا ه و = ل ه و وهو باطل

(الأمر الثاني) اذا كانت الزاويتان المتبادلتان الخارجتان ع ه ب , حـ و ط متساويتين فان الزاويتين ا ه و , ه و ء المقابلتين لهما برأسيهما تكونان متساويتين وعلى مقتضى ما تقدم اثباته يكون ا ب موازيًا حـ ء

(الامر الثالث) اذا كانت الزاويتان المتناظرتان ع ه ب , ه و ء متساويتين فمن حيث ان الزاوية ع ه ب = ا ه و تكون الزاوية ا ه و = ه و ء وبذا تكون ا ب موازيًا حـ ء

(الامر الرابع) اذا كان مجموع الزاويتين ب ه و , ه و ء مساويًا لزاويتين قائمتين فمن حيث أن ب ه و + ا ه و = ٢ ق ينتج ان ا ه و = ه و ء وبذا يكون ا ب موازيًا حـ ء

القضية السابعة والعشرون
نظرية

الزاويتان اللتان اضلاعهما متوازية تكونان اما متساويتين واما مكملتين لبعضهما

اولا ليكن ا ب حـ , ء ه و زاويتين اضلاعهما متوازية ومتجهة الى جهة واحدة فهاتان الزاويتان تكونان متساويتين لان الزاويتين ء ل حـ , ء ه و متساويتان بما انهما متناظرتان والزاوية ء ل حـ = ا ب حـ بالدليل عينه فعلى هذا تكون

الزاوية ا ب ح = د هـ و

ثانياً لتكن ا ب ح ، م هـ ط زاويتين اضلاعهما متوازية ومتجهة الى جهتين متضادتين فهاتان الزاويتان تكونا متساويتين

لان م هـ ط = د هـ و ، د هـ و = ا ب ح

ثالثاً الزاويتان ا ب ح ، د هـ م اللتان اضلاعهما متوازية لكن اثنين منهما ب ا ، هـ د متجهان الى الجهة واحدة والضلعان الآخران ب ح ، هـ م متجهان الى اتجاهين متضادين تكونان مكملتين لبعضهما لان د هـ م مكملة للزاوية د هـ و وان الزاوية د هـ و = ا ب ح

القضية الثامنة والعشرون

نظريه

الزاويتان اللتان اضلاعهما المتناظرة متعامدة تكونان اما متساويتين واما مكملتين لبعضهما

لتكن ب ا ح ، د هـ و زاويتين اضلاعهما المتناظرة متعامدة ولنمد من النقطة ا مستقيماً ا ي عموداً على ا ب ومستقيماً ا ط عموداً على ا ح فالمستقيمان ا ي ، ا ط يكونان موازيين للمستقيمين هـ د ، هـ و على التناظر ومتجهان معهما الى جهة واحدة وبذا تكون الزاوية ي ا ط

مساوية للزاوية ده و لكن

سه ا ط + ط ا ب = ا ق

و ب ا ح + ط ا ب = ا ق

فعلى ذلك تكون الزاوية سه ا ط = ب ا ح

(تنبيه) اذا اعتبرت الزاوية الحادثة من المستقيم هو وامتداد ده يرى ان الزاوية وهج مكملة للزاوية ب ا ح

القضية التاسعة والعشرون

نظرية

مجموع زوايا اى مثلث يساوى زاويتين قائمتين

لانه اذا مد المستقيم اه موازيا حب وعد حا على استقامته فان الزاويتين احب و ها د تكونان متساويتين لانهما متناظرتان بالنسبة للمستقيمين المتوازيين بح , ها المقطوعين بالقاطع اح والزاويتان حبا , با ه تكونان متساويتين أيضا لانهما متبادلتان داخلتان بالنسبة للمستقيمين المتوازيين بح , ها والقاطع اب فعلى ذلك يكون مجموع زوايا المثلث مساويا لمجموع الثلاث زوايا حاب , با ه , ها د المتشكلة حول النقطة ا فى جهة واحدة من المستقيم اد وحيث ان هذا المجموع الاخير يساوى ٢ ق فيكون مجموع زوايا المثلث يساوى ٢ ق أيضا

(نتيجه ١) لا يمكن ان يوجد فى أى مثلث الا زاويه قائمة واحدة ومن باب أولى لا يوجد فيه الا زاوية منفرجة واحدة

(نتيجه ٢) أى مثلث قائم الزاوية مجموع زاويتيه الحادتين يساوى قائمة واحدة

(نتيجه ٣) متى علمت زاويتان من مثلث أو علم مجموعهما فقط امكن الحصول على الزاوية الثالثة بطرح هذا المجموع من زاويتين قائمتين

(نتيجه ٤) الزاوية الخارجية ب ا ء الحادثة من الضلع ب ا وامتداد حا تساوى مجموع الزاويتين الداخلتين ح ب ا ، ب ح ا

القضية الثلاثون
نظرية

مجموع الزوايا الداخلة فى أى مضلع محدب يساوى قائمتين مكررتين بقدر ما فيه من الاضلاع الا اثنين

لانه اذا وصل من احدى الرؤس ا أقطار لجميع الرؤس الغير مجاورة لهذه الرأس فان المضلع يتحلل بذلك الى مثلثات عددها كعدد الاضلاع الا اثنين اذ يمكن اعتبار هذه المثلثات مشتركة فى الرأس ا وقواعدها اضلاع المضلع ماعدا المثلثين النهائيين فان كلا منهما يحتوى على ضلعين من اضلاع المضلع ويشاهد أيضا أن مجموع زوايا هذه المثلثات يساوى مجموع زوايا المضلع فعلى ذلك يكون هذا المجموع الاخير مساويا قائمتين مكررتين بقدر اضلاع المضلع

الاثنين فاذا جعل ن رمزاً لعدد اضلاع المضلع فان مجموع زواياه يكون عبارة عن ٢ × (ن − ٢) أو عن ٢ ن − ٤

القضية الحادية والثلاثون

نظرية

كل ضلعين متقابلين من متوازي الاضلاع يكونان متساويين وكذا كل زاويتين متقابلتين من زواياه

لانه اذا وصل القطر ب د كان هذا القطر ضلعاً مشتركاً بين المثلثين ا د ب , د ب ح وزيادة على ذلك فانه بسبب توازي ا د , ب ح تكون الزاوية ا د ب = د ب ح (قضية ٢٥) وانه بسبب توازي ا ب , د ح تكون الزاوية ا ب د = ب د ح فعلى هذا يكون المثلثين ا د ب , د ب ح متساويين (قضية ٦) وبذا يكون الضلع ا ب المقابل للزاوية ا د ب مساوياً للضلع د ح المقابل للزاوية المساوية لها د ب ح وأيضاً يكون الضلع الثالث ا د مساوياً للضلع الثالث ب ح فحينئذٍ يكون كل ضلعين متقابلين من متوازي الاضلاع متساويين

واما كون كل زاويتين متقابلتين من متوازي الاضلاع متساويتين فهو لانه لما كان المثلثان المذكوران متساويين كانت الزاوية ا = ح وايضاً الزاوية ا د ح المركبة من ا د ب , ب د ح متساوية للزاوية ا ب ح المركبة من

د ب ج ، ا ب د

(نتيجه ١) المستقيمات المتوازيات ا ب ، ج د المحصوران بين مستقيمين متوازيين أخرين ا د ، ب ج يكونان متساويين

(نتيجه ٢) كل مستقيمين متوازيين يكونان على ابعاد متساوية فى جميع امتدادها

لانه اذا كان ج د ، ا ب مستقيمين متوازيين وانزل من النقطتين ع و ط عمودان ع و ، ط هـ على ا ب فان هذين العمودين يكونان متوازيين ثم انهما يكونان متساويين لداعى كونهما محصورين بين مستقيمين متوازيين

القضية الثانية والثلاثون
نظريه

فى أى شكل رباعى مثل ا ب ج د اذا كان كل ضلعين متقابلين متساويين أى اذا كان ا ب = ج د ، ا د = ب ج فان الاضلاع المتساويه تكون متوازيه وبذا يكون الشكل المذكور متوازى الاضلاع

لانه اذا وصل القطر د ب كانت الاضلاع المتناظرة فى المثلثين ا ب د ، ب د ج متساوية وبذا يكونان متساويين ومن تساويهما تكون الزاوية ا د ب المقابلة للضلع ا ب مساوية للزاوية د ب ج المقابلة للضلع ج د فعلى

مقتضى القضية السادسة والعشرون يكون الضلع اد متوازيًا للضلع ب ح
وبمثل هذا يبرهن على ان اب يوازى ح د ومن حينئذٍ يكون الشكل ا ب ح د
متوازى الاضلاع .

القضية الثالثة والثلاثون

نظرية

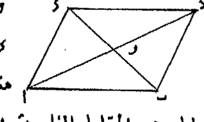
اذا كان ضلعان متقابلان ا ب ، ح د من شكل رباعى متساويين ومتوازيين
فان الضلعين الاخيرين يكونان متساويين ومتوازيين أيضًا ويكون الشكل
ا ب ح د متوازى الاضلاع

لانه اذا وصل القطر ب د حدث مثلثان ا ب د
، ب د ح فيهما الضلع اب = ح د بالفرض والضلع
ب د مشترك بينهما والزاوية ا ب د = ب د ح
لان اب يوازى ح د فعلى مقتضى النظرية الخامسة يكون المثلثان المذكوران
متساويين ومن تساويهما يكون الضلع اد = ب ح والزاوية ادب = د ب ح
ومن تساوى هاتين الزاويتين يكون اد موازيًا ب ح وبذا يكون الشكل ا ب ح د متوازى الاضلاع

القضية الرابعة والثلاثون

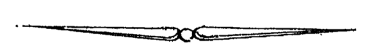
نظرية

قطرا متوازى الأضلاع وهما اح ، د ب ينصفان بعضهما
لانه من مقارنة المثلث ا د و بالمثلث ح و ب يرى ان الضلع اد = ح ب



والزاوية ا د و = حـ ب و (قضية ٥) والزاوية د ا و = و حـ ب وبذا يكون المثلثان المذكوران متساويين (قضية ٦) ومن تساويهما يكون الضلع ا و المقابل للزاوية ا د و مساويًا للضلع و حـ المقابل للزاوية و ب حـ وايضًا يكون د و = و ب

(تنبيه) من حيث ان الضلعين ا ب , ب حـ يكونان متساويين فى حالة المعين فان الاضلاع المتناظرة فى المثلثين ا و ب , و ب حـ تكون متساوية وبذا يكون هذان المثلثان متساويين ومن هذا ينتج ان الزاوية ا و ب = ب و حـ وحينئذٍ يشاهد أن قطرى المعين يتقاطعان مع بعضهما على زوايا قائمه



المقالة الثانية
في الدائرة وفي قياس الزوايا

تعاريف

(بند ١) محيط الدائرة خط منحن جميع نقطه على ابعاد متساوية من نقطة داخلة تسمى مركزا

والدائرة هي جزء المستوى المحاط بهذا الخط المنحني

(٢) كل خط مستقيم مثل ح ا أو ح هـ أو ح د أو ح ب وصل بين المركز ونقطة من المحيط يسمى نصف قطر وكل خط مثل ا ب مرّ بالمركز وانتهى من الطرفين بالمحيط يسمى قطرا

وعلى مقتضى تعريف الدائرة تكون انصاف الاقطار كلها متساوية وتكون الاقطار أيضا كلها متساوية وأضعافا لنصف القطر

(٣) القوس جزء من المحيط مثل وج ط

ووتر القوس هو الخط المستقيم ط و الواصل بين نهايتيه

(٤) قطعة الدائرة جزء من سطحها المحصور بين قوس ووتره

(تنبيه) الوتر الواحد ط و يقابله دائما قوسان وج ط , وهـ ط وعلى هذا يقابله قطعتان أيضا لكنه ان لم يذكر القوس الاكبر أو القطعة الكبرى على وجه

التخصيص فلا يفهم من ذلك سوى القوس الأصغر

(٥) القطاع هو جزء من الدائرة محصور بين قوس مثل ء هـ ونصفي القطرين حـ ء , حـ هـ الواصلين لنهايتي هذا القوس

(٦) الخط الذي نهايتاه على المحيط كالخط ا ب يسمى خطاً مرسوماً في الدائرة

والزاوية التي رأسها على المحيط وضلعاها وتران كالزاوية حـ ا ب تسمى زاوية محيطية أو زاوية مرسومة في الدائرة

والمثلث الذي رؤسه على المحيط كالمثلث ا ب حـ يسمى مثلثاً مرسوماً في الدائرة وعلى العموم كل شكل وجدت جميع رؤس زواياه على المحيط يسمى شكلاً مرسوماً في الدائرة ويقال أيضاً ان الدائرة مرسومة على هذا الشكل

(٧) القاطع خط يقابل المحيط في نقطتين كالخط ا ب

(٨) المماس هو مستقيم لا يشترك مع محيط الدائرة الا في نقطة واحدة كالمستقيم حـ ء والنقطة المشتركة هـ تسمى نقطة التماس

(٩) وكذلك محيطا الدائرتين يكونان متماسين اذا لم يشتركا الا في نقطة واحدة

(تنبيه) المستقيم المماس لمنحن على وجه العموم هو نهاية الاوضاع التي يأخذها قاطع مثل ا ب يدور حول نقطة من المنحنى مثل ا حتى ان نقطة ثانية من نقط التقاطع تأتي وتتحد مع النقطة المذكورة

فاذا كان المنحنى مقعوّلاً ولم يمكن ان يقابله مستقيم فى اكثر من نقطتين كمحيط الدائرة لكن البديهى انه متى اجتمعت نقطتا التقاطع فى نقطة واحدة فلا يكون المستقيم مشتركاً مع المنحنى الا فى نقطة واحدة واذن يمكن عند الارادة تعريف المماس بانه مستقيم لا يشترك مع المنحنى الا فى نقطة واحدة لكن التعريف الاول يليق دون غيره بجميع انواع المنحنيات حتى بمحيط الدائرة وله المزية فى اظهار بعض امور مهمة تضاهى بعضها فى جملة نظريات.

(١٠) المضلع يكون مرسوماً على دائرة اذا كانت جميع اضلاعه مماسة لمحيط الدائرة وفى هذه الحالة يقال أيضاً أن الدائرة مرسومة فى المضلع المذكور

القضية الأولى
نظرية

كل قطر مثل ا ب يقسم كلاً من الدائرة ومحيطها الى قسمين متساويين لانه اذا طبق الشكل ا هـ ب على ا و ب بجعل ا ب قاعدة مشتركة يلزم ان الخط المنحنى ا هـ ب يقع بالضبط على الخط المنحنى ا و ب اذ بخلاف ذلك يوجد

فيهما نقط غير متساوية البعد عن المركز وهو بخلاف تعريف الدائرة

القضية الثانية

نظرية

كل وتر فهو أصغر من القطر

لانه اذا وصل النصف قطرين اء ، ء د الى نهايتى الوتر اد كان الخط المستقيم اد < اء + ء د

أى اد < اب

(نتيجة) ينتج مما ذكر ان اكبر خط مستقيم يمكن رسمه فى الدائرة يساوى قطرها

القضية الثالثة

نظرية

أى خط مستقيم لا يقابل محيط الدائرة فى اكثر من نقطتين

لانه لو قابله فى ثلاثة نقط لكانت هذه النقط الثلاث متساوية البعد عن المركز وبذا يوجد ثلاث مستقيمات متساوية واصلة من نقطة واحدة الى ثلاث نقط على مستقيم واحد وهو محال (قضية ١٦ مقالة ١)

القضية الرابعة

نظرية

فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية الاقواس المتساوية أوتارها متساوية وبالعكس أى الاوتار المتساوية أقواسها متساوية

فاذا كان نصف القطر اد مساوياً لنصف القطر هو وفرض ان القوس ام ء

يساوى القوس هدح فان الوتر اء

يكون مساويا للوتر هح

لانه لما كان القطر اب مساويا للقطر هط

امكن تطبيق نصف الدائرة ام ء ب بالضبط على نصف الدائره هدح ط والخط المنحنى ام ء ب يتحد بالكليه مع الخط المنحنى هدح ط لكن حيث ان الوتر ام ء = هدح بالفرض فتقع النقطة ء على النقطة ح وبذا يكون الوتر اء مساويا للوتر هح

وبالعكس اذا كان الوتر اء = هح بفرض ان نصف قطر اد لم يزل مساويا هو فان القوس ام ء يكون مساوياً للقوس هدح

لانه اذا مد النصفا قطرين دء , وح كانت اضلاع المثلثين ادء , هوح متساوية على التناظر أى اد = هو , دء = وح , اء = هح وبذا يكون هذان المثلثان متساويين (قضية ١١ مقاله ١) فاذا وضع النصف دائرة اء ب على مساويه هح ط فان نصف القطر دء يقع على نصف القطر وح لداعى ان الزاوية ادء = هوح واذن تقع النقطة ء على النقطة ح وحينئذ يكون القوس ام ء مساويا للقوس هدح

القضيه الخامسه
نظريه

فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية القوس الاكبر وتره اكبر وبالعكس أى الوتر الاكبر

قوسه اكبر ويشترط في ذلك ان يكون كل من الاقواس الجاري اعتبارها أقل من نصف المحيط

لانه اذا كان القوس ا م ح اكبر من القوس ﻫ ٥ ط ولنأخذ قوس ا م ٤ = ﻫ ٥ ط فان الوترين ا ٤ ، ﻫ ط يكونان متساويين واذا وصل نصفا القطرين ٤ ٤ ، ٤ ح فان الضلعين ا ٤ ، ٤ ح من المثلث ا ٤ ح يكونان مساويين للضلعين ا ٤ ، ٤ ٤ من المثلث ا ٤ ٤ وحيث ان الزاويه ا ٤ ح > ا ٤ ٤ فالضلع الثالث ا ح يكون اكبر من الضلع الثالث ا ٤ وأيضاً يكون ا ح > ﻫ ط

وبالعكس اذا كان الوتر ا ح > ﻫ ط فان القوس ا م ح يكون اكبر من ﻫ ٥ ط لانه اذا كان ا م ح مساوياً ﻫ ٥ ط كان الوتر ا ح مساوياً ﻫ ط وهو بخلاف الغرض واذا كان القوس ا م ح < ﻫ ٥ ط كان الوتر ا ح < ﻫ ط وهو بخلاف الغرض أيضاً

(تنبيه) قد فرض ان كلاً من الاقواس الجاري اعتبارها اقل من نصف المحيط فاذا كان كلاً منها اكبر من نصف المحيط كان الامر بعكس ما ذكر

القضية السادسة
نظريه

المنصف قطر م ٤ العمود على وتر مثل ا ب يقسم كلاً من هذا الوتر والقوس

ا د ب الموتر به الى قسمين متساويين

لانه اذا وصل النصفا قطرين م ا ، م ب فانهما
يصيران مائلين متساويين بالنسبة للعمود م د
وبذا يكونان متباعدين عن العمود ببعدين متساويين
(قضية ١٦ مقاله ١) فعلى ذلك يكون ا د = د ب
واما كون نصف القطر المذكور ينصف القوس ا د ب فلانه من حيث أن ا د
= د ب يكون م د عموداً على منتصف ا ب واذن (قضية ١٧ مقاله ١)
يجب ان تكون كل نقطة من نقط هذا العمود متساوية البعد عن النهايتين
ا ، ب وحيث ان د احدى هذه النقط فيكون البعد ا د = ب د لكن اذا كان
الوتر ا د مساوياً للوتر د ب يكون القوس ا د مساوياً للقوس د ب (قضية ٤)
فعلى ذلك يكون النصف قطر م د العمود على الوتر ا ب قاسماً للقوس
الموتر بهذا الوتر الى قسمين متساويين فى النقطة د

(تنبيه) قد علم ان المستقيم م د يمر بالمركز وبمنتصف القوس وانه عمود
على الوتر فمن حيث ان اثنين من هذه الشروط يكفيان فى تعيين المستقيم
يعلم من ذلك ان كل خط مستقيم اوفى بشرطين من هذه الشروط لا بد من
كونه يحقق الشرطين الاخرين

وعلى هذا فالعمود المقام على منتصف وتر يمر بالمركز ومنتصف القوس
وقس على هذا

القضية السابعة
نظرية

كل ثلاث نقط ليست على خط مستقيم كالنقط ا و ب و حـ يمكن دائماً ان يمر بها محيط دائرة ولا يمكن ان يمر بها الا محيط واحد

لنصل ا ب و ب حـ ولنقيم العمودين د هـ و ط على منتصفي هذين المستقيمين فهذان العودان يتلاقيان لانهما اذا كانا متوازيين فان الخطين ب ا و ب حـ الممتدين من النقطة ب بالتعامد على هذين المتوازيين يكونا على امتداد بعضهما وهو بخلاف الغرض

اذا تقرر ذلك فان النقطة م التي يتقابل فيها المستقيمان د هـ و ط تكون على بعدين متساويين من النقطتين ا و ب اذ هي على العمود د هـ وحيث ان النقطة عينها توجد على العمود و ط فانها تكون على بعدين متساويين من النقطتين ب و حـ واذن تكون الابعاد م ا و م ب و م حـ متساوية وبناء عليه فالمحيط المرسوم من المركز م بنصف القطر م ب يمر بالثلاث نقط ا و ب و حـ وزيادة على ذلك انه لا يمكن ان يمر محيط دائرة اخرى بالنقط الثلاث المذكورة لانه اذا مر بها محيط آخر وجب وجود مركزه على الخطين د هـ و ط في آن واحد وحيث انه لا يمكن تقاطع هذين المستقيمين الا في نقطة واحدة صار الامر المذكور مثبوتاً

(نتيجه ١) حيث ان النقطة م متساوية البعد عن ا ر د فان العمود المقام على منتصف اد يمر بها ومن هنا ينتج ان الاعمدة المقامة على منتصفات اضلاع أى مثلث تتقاطع فى نقطة واحدة

(نتيجه ٢) محيطا أى دائرتين لا يمكن اشتراكهما فى اكثر من نقطتين بدون ان يتحدا ويصيرا محيطا واحدًا

القضيـــة الثامنه

نظريه

الوتران المتساويان بعداهما عن المركز متساويان والوتران الغير متساويين اصغرهما البعدهما عن المركز

اولاً اذا كان الوتر اب = ده وقسم كل منهما الى قسمين متساويين بالعمودين م ط ، م ح ووصل النصفا قطرين م ا ، م د فان المثلثين م ا ط ، د م ح القائمى الزاوية يكونان متساويين لان وتريهما م ا ، م د متساويان والضلع ا ط الذى هو نصف اب يساوى الضلع د ح الذى هو نصف ده ومن تساوى هذين المثلثين يكون الضلع الثالث م ط مساويًا للضلع الثالث م ح وبذا يثبت الامر الاول وهو كون بعدى الوترين المتساويين اب ، ده عن المركز متساويين

ثانيًا اذا كان الوتر اج > ده فان القوس اكح يكون اكبر من القوس دزه (قضية ٥) فاذا أخذ من القوس اكح جزء ا هـ ب = دزه ووصل الوتر ا ب وانزل العمود م ط على هذا الوتر والعمود م ى على اج لكن الواضح ان م ط يكون اكبر من م و ، م و > م ى ومن باب أولى يكون م ط > م ى لكن م ط = م ح لداعي ان الوترين ا ب ، د ه متساويان فعلى ذلك يكون م ح > م ى وحينئذٍ يكون أصغر الوترين الغير المتساويين أبعدهما عن المركز

القضيــة التاسعة

نظرية

العمود ب د المقام على نصف القطر م ا من نهايته ا يكون مماسًا لمحيط الدائرة

لان كل مائل مثل م ه اطول من العمود م ا فعلى هذا تكون النقطة ه خارجة عن محيط الدائرة واذن لا يكون للمستقيم ب د نقط مشتركة مع المحيط الا النقطة ا وبذا يكون ب د مماسًا

وبالعكس نصف القطر م ا الواصل لنقطة التماس ا يكون عمودًا على المماس ب د لانه لما كانت جميع نقط هذا الخط ماعدا النقطة ا خارجة عن المحيط فان نصف القطر م ا يكون أقصر خط ممكن مده من النقطة م الى المستقيم ب د

وبذا يكون عموداً على هذا المستقيم

(نتيجه) اى نقطة من محيط الدائرة كالنقطة ا لايمكن ان يمد منها الا مماس واحد لهذا المحيط

القضية العاشره

نظريه

المستقيمان المتوازيان اب , ده يحصران بينهما من المحيط قوسين متساويين ىه وح ك

لانه لا بد فى هذه القضية من وقوع حالة من الحالات الثلاث الاتيه

(الحالة الاولى) ان يكون المستقيمان المتوازيان قاطعين لمحيط الدائرة فاذا مد النصف قطر م ط العمود على الوتر ى ح فانه يكون فى آن واحد عموداً على موازيه ه ك وعلى ذلك تكون النقطة ط منتصف كل من القوسين ى ط ح , ه ط ك (قضية ه) وبذا يكون القوس ى ط = طح والقوس ه ط = ط ك. ومن ذلك ينتج ان ى ط ـ ه ط = طح ـ ط ك أى ان ه ى = ك ح

(الحالة الثانيه) ان يكون احد المستقيمين المتوازيين اب , ده قاطعاً والاخر مماساً فاذا وصل النصف قطر م ط الى نقطة التماس ط فان النصف قطر

المذكور يكون عموداً على المماس د هـ (قضيه ٩) ويكون عموداً على موازيه ب ح
لكن حيث كان م ط عموداً على الوتر ب ح فان النقطة ط تكون منتصف
القوس ب ط ح فعلى ذلك يكون القوسان ب ط , ط ح المحصوران بين
المتوازيين ا ب , د هـ متساويين

(الحالة الثالثه) ان يكون المستقيمان المتوازيان د هـ , هـ ل مماسين
لمحيط الدائرة احدهما فى ط وثانيهما فى ك فاذا مدّ القاطع ا ب الموازى
لهما فانه على مقتضى ما تقدم يكون ب ط = ط ح , ب ك = ك ح واذن
يكون القوس الكلى ط ب ك = ط ح ك وزيادة على ذلك يشاهد أن
كلاًّ من هذين القوسين عبارة عن نصف المحيط

القضية الحادية عشر
نظريه

اذا اشترك محيط دائرتين فى نقطة مثل ا خارجة عن المستقيم م مَ الواصل
بين مركزيهما فلابد من اشتراكهما أيضاً فى نقطة ثانية اَ من العمود ا ب
المنزل على م مَ بحيث يكون بعد النقطتين ا , اَ عن هذا المستقيم متساويين
وذلك لانه اذا كان المستقيمان ا ب , اَ ب
متساويين فان المستقيمين م ا , م اَ يكونان
متساويين بما انهما مائلان متساويا البعد عن موقع
العمود م ب على المستقيم ا اَ واذن فالدائرة المرسومة عن المركز م بالنصف قطر م ا تمرّ

بالنقطة اً وبمثل هذا يشاهد ان الدائرة المرسومة من المركز مَ بالنصف قطر
مَ ا يجب مرورها بالنقطة اً

(نتيجه ١) اذا تقاطع محيطا دائرتين فان الخط الواصل بين مركزيهما يكون عموداً
على منتصف الوتر المشترك بين المحيطين

(نتيجه ٢) اذا تماس محيطا دائرتين فان نقطة التماس تكون موجودة على خط
المركزين اذ بخلاف ذلك يشترك المحيطان المذكوران فى نقطتين ويكونان متقاطعين

أى محيطى دائرتين لا يمكن ان يكونا موضوعين بالنسبة لبعضهما الا بأحد
الأوضاع الآتيه وهى اما ان يكونا متباعدين فى الخارج أو فى الداخل أو يكونا متماسين
فى الخارج أو فى الداخل أو يكونا متقاطعين

القضية الثانية عشر

نظريه

محيطا الدائرتين المتباعدان فى الخارج يكون بعد مركزيهما اكبر من مجموع نصفى
قطريهما لانه يحدث

م مَ = م ا + مَ اَ + ا اَ

ومن هذا يحدث

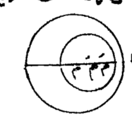
م مَ > م ا + مَ اَ

القضية الثالثة عشر

نظريه

محيطا الدائرتين المتباعدان فى الداخل يكون البعد بين مركزيهما أصغر من

من فرق نصفي قطريهما



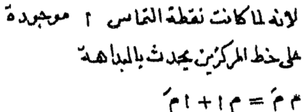
لانه يحدث م مَ = م ا − مَ اَ − ا اَ

ومن هذا يحدث م مَ < م ا − مَ اَ

القضية الرابعة عشر

نظرية

محيطا الدائرتين المتماسان في الخارج يكون بعد مركزيهما مساوياً لمجموع نصفي قطريهما



لانه لما كانت نقطة التماس ا موجودة على خط المركزين يحدث بالبداهة

م مَ = م ا + ا مَ

القضية الخامسة عشر

نظرية

محيطا الدائرتين المتماسان في الداخل يكون بعد مركزيهما مساوياً لفرق نصفي قطريهما

لان نقطة التماس ا موجودة على خط المركزين وبذا يكون

م مَ = م ا − مَ ا

القضية السادسة عشر

نظرية

محيطا الدائرتين المتقاطعتان يكون بعد مركزيهما أصغر من مجموع نصفى قطريهما واكبر من فرقهما

لانه اذا وصل مستقيمان بين المركزين واحدى نقطتى التقاطع ا مثلاً احدث مثلث اضلاعه هى خط المركزين م مَ والنصفا قطرين م ا و مَ ا ومن المعلوم ان أى ضلع من المثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين واكبر من فرقهما

(تنبيه) عكس كل من النظريات الخمس المتقدمه صحيح ويبرهن على كل منهما بطريقة واحدة فاذا فرض مثلاً ان بعد المركزين أصغر من مجموع نصفى القطرين واكبر من فرقهما فان محيطى الدائرتين يكونان متقاطعين لانهما اذا كانا متباعدين فى الخارج كان بعد المركزين اكبر من مجموع نصفى القطرين واذا كانا متباعدين فى الداخل كان بعد المركزين أصغر من فرق نصفى القطرين واذا كانا متماسين كان بعد المركزين مساوياً لمجموع نصفى القطرين أو لفرقهما

القضية السابعة عشر

نظرية

فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية كل زاويتين مركزيتين متساويتين مثل ا م ب

, ٤ م هـ يكون قوساهما ا ب , ٤ هـ متساويين

وبالعكس اذا كان القوسان ا ب , ٤ هـ متساويين كانت الزاويتان ا م ب , ٤ م هـ متساويتين

(برهان ذلك) أولاً اذا فرض ان الزاوية ا م ب مساوية للزاوية ٤ م هـ فانه يمكن تطبيق احداهما على الاخرى وحيث ان اضلاعهما متساوية فمن الواضح ان النقطة ا تقع على ٤ والنقطة ب على هـ وحينئذ يتحد القوس ا ب مع القوس ٤ هـ لانه ان لم يتحد أو يصير قوساً واحداً لوجد فيهما نقط غير متساوية البعد عن المركز وهو محال فعلى ذلك يكون القوس ا ب = ٤ هـ

ثانياً اذا فرض ان القوس ا ب = ٤ هـ فان الزاوية ا م ب تكون مساوية للزاوية ٤ م هـ لانه ان لم تكن هاتان الزاويتان متساويتين وفرض ان ا م ب أكبرهما ولتخذ الزاوية ا م و = ٤ م هـ فانه بمقتضى ما تقدم يكون القوس ا و = ٤ هـ وحيث ان القوس ا ب = ٤ هـ بالفرض فيكون القوس ا و = ا ب أى يكون الجزء مساوياً للكل وهو محال فعلى ذلك تكون الزاوية ا م ب = ٤ م هـ

القضية الثامنة عشر

نظرية

فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية النسبة بين أى زاويتين مركزيتين

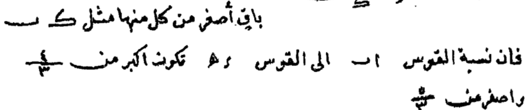
كالنسبة بين القوسين المحصورين بين اضلاعهما

لتكن ام ب , د مَ هـ زاويتين مركزيتين في محيطي دائرتين متساويتين

فاذا فرض أولاً انه يوجد مقياس مشترك بين القوسين ا ب , د هـ بان كان القوس ا ب مشتملاً عليه ٧ مرات والقوس د هـ مشتملاً عليه ٤ مرات فالنسبة بين القوسين ا ب , د هـ تكون $\frac{٧}{٤}$

واذا وصلت مستقيمات من نقط تقاسيم القوسين الى مركزي المحيطين فان الزاوية ام ب تنقسم الى ٧ زوايا وهذه الزوايا تكون متساوية لان اقواسها متساوية ثم ان الزاوية د مَ هـ تكون مشتملة على ٤ من هذه الزوايا فعلى ذلك تكون النسبة بين الزاويتين ام ب , د مَ هـ هي $\frac{٧}{٤}$ أيضاً

واذا فرض انه لا يوجد مقياس مشترك بين القوسين ا ب , د هـ وانه اذا قسم القوس د هـ الى ثلاثة اقسام متساوية وفرض ان القوس ا ب مشتمل على اربعة من هذه الاقسام وعلى باق أصغر من كل منها مثل ك ب



فان نسبة القوس ا ب الى القوس د هـ تكون اكبر من $\frac{٤}{٣}$ واصغر من $\frac{٥}{٣}$

لكن اذا وصلت مستقيمات من المركزين م , و الى نقط تقسيم القوسين

فان الزاوية د وهو تنقسم الى ثلاثة أقسام متساوية واما الزاوية ا م ب فتصير مشتملة على اربعة من هذه الاقسام مضافا اليهما باق ك م ب أصغر من كل منها وعلى ذلك تكون النسبة بين الزاويتين محصورة بين ٣/٤ و ٥/٣ أيضاً فاذن يكون كل من النسبتين ا م ب : د م هـ و ا ب : د هـ محصورة بين ٤/٣ و ٥/٣ لكن اذا قسم القوس د هـ الى ١٠ أو الى ١٠٠ أو الى ١٠٠٠ أو ...... ن من الاقسام المتساوية فانه يبرهن بمثل ما ذكر على ان النسبتين المتقدمتى الذكر تكونان محصورتين بين عددين متعاقبين من الاعشار أو من الاجزاء من مايه أو ...... ن فحينئذ تكون هاتان النسبتان متساويتين لانه قد ثبت انهما محصورتان بين عددين يمكن صغر فرقهما على قدر مايراد

فى قياس الزوايا

قياس أى مقدار هو ايجاد نسبته الى الوحدة التى من نوعه وعلى ذلك اذا جعلت الزاوية القائمة وحدة للزوايا فان قياس أى زاوية يكون هو النسبة الكائنة بين هذه الزاوية والزاوية القائمة

لكنه قد شوهد من النظرية السابقة انه يمكن استعواض نسبة الزاويتين المركزيتين بنسبة القوسين المحصورين بين اضلاعهما فعلى هذا مقارنة أى زاوية بالزاوية القائمة يمكن استعواضه بمقارنة قوس هذه الزاوية بربع المحيط وفى هذا المعنى يقال على سبيل الاختصار ان الزاوية المركزيه تقاس

بالقوس المحصور بين ضلعيها

ولسهولة المقارنة المذكورة يقسم محيط الدائرة الى ٣٦٠ من الاجزاء المتساوية وهذه الاجزا تسمى درجات وكل درجة تقسم الى ٦٠ دقيقه وكل دقيقه الى ٦٠ ثانيه وهكذا

فاذا كان القوس المحصور بين ضلعي زاوية مركزية يحتوى على ٤٤ درجه فان قياس هذه الزاويه يكون $\frac{٤٤}{٩٠}$ أى $\frac{٢٢}{٤٥}$

(تنبيه) النسبة بين أى قطاعين مأخوذين فى دائرتين متساويتين كالنسبة بين القوسين المحصورين بين اضلاعهما وبرهان ذلك مطابق لبرهان النظرية المتقدمه

القضية التاسعة عشر

نظريه

أى زاوية محيطية مثل ب ا د تقاس بنصف القوس ب د المحصور بين ضلعيها

لنفرض أولاً ان مركز الدائرة موجود بين ضلعي الزاوية ب ا د فاذا امد القطر ا هـ والنصفا قطرين م ب ، م د فان الزاوية ب م هـ الخارجة عن المثلث ا ب م تكون مساوية لمجموع زاويتيه الداخلتين م ا ب ، ا ب م (قضية ٩ مقاله ١) لكن حيث ان المثلث ب ا م متساوى الساقين فان الزاوية م ا ب = ا ب م وعلى ذلك تكون الزاوية ب م هـ

ضعف الزاوية ب ا م وحيث ان الزاوية ب م هـ مركزية فانها تقاس بالقوس ب هـ ومن ذا يعلم ان الزاوية ب ا م تقاس بنصف القوس ب هـ وبمثل هذا الدليل يرى ان الزاوية م ا د تقاس بنصف القوس هـ د فعلى ذلك ب ا م + م ا د أى ب ا د تقاس بنصف ب هـ + هـ د أى بنصف ب د

ثانياً لنفرض أن المركز م موجود خارج الزاوية ب ا د ولنصل حينئذٍ القطر ا هـ فالزاوية ب ا هـ تقاس بنصف القوس ب هـ والزاوية د ا هـ تقاس بنصف القوس د هـ فالفرق بين هاتين الزاويتين وهو الزاوية ب ا د يقاس بنصف القوس ب هـ مطروح منه نصف القوس هـ د أى تقاس بنصف ب د

ومما ذكر يعلم ان كل زاوية محيطية تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها

(نتيجه ١) الزوايا المرسومة فى قطعة ولحدة كالزاويتين ب ا حـ , ب د حـ كلهما متساوية لان كلاً منها يقاس بنصف قوس واحد ب هـ حـ

(نتيجه ٢) كل زاوية مرسومة فى نصف المحيط تكون قائمة لانها تقاس بنصف نصف المحيط أى بربع المحيط .

(نتيجة ٣) كل زاوية مرسومة فى قطعة اكبر من نصف الدائرة كالزاوية ب ا حـ تكون حادة لانها تقاس بنصف القوس ب هـ حـ الأقل من نصف المحيط

وكل زاوية مرسومة فى قطعة أصغر من نصف الدائرة كالزاوية ب هـ د تكون منفرجة لانها تقاس بنصف القوس ب ا د الاكبر من نصف المحيط .

القضية العشرون

نظرية

الزاوية ب ا د المشكلة من مماس ووتر تقاس بنصف القوس ا م ء د المحصور بين ضلعيها

لانه اذا مد القطر ا ء من نقطة التماس ا فالزاوية ب ا ء تكون قائمة (قضية ٩) وتقاس حينئذ بنصف نصف المحيط ا م ء وقد علم مما مر ان الزاوية ء ا د تقاس بنصف القوس ء د فعلى ذلك ب ا ء + ء ا د أى ب ا د تقاس بنصف القوس ا م ء مضافاً عليه نصف القوس ء د أى تقاس بنصف القوس الكلى ا م ء د

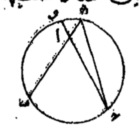
وبمثل هذا يبرهن على ان الزاوية د ا هـ تقاس بنصف القوس ا د المحصور بين ضلعيها

القضية الحادية والعشرون

نظرية

الزاوية ب ا د التى رأسها داخل المحيط المشكلة من القاطعين ب هـ , و د تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها مضافاً اليه نصف القوس المحصور

بين امتداد ضلعيها

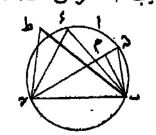


وذلك لان الزاوية ب ا ح تساوى مجموع الزاويتين اهـ د , ا د هـ اذ هى خارجة عن المثلث ا هـ د وان الزاوية الاولى تقاس بنصف القوس ب ح والثانية بنصف القوس هـ ن

القضية الثانية والعشرون

نظرية

الزاوية ب ا ح التى رأسها خارجة عن المحيط المشكلة من القاطعين ا ب , ا ح تقاس بنصف القوس المقعر ب ح مطروحا منه نصف القوس المحدب ء هـ



وذلك لان الزاوية ا تساوى فرق الزاويتين ب ء ح , ا ب ء وان الأولى من هاتين الزاويتين تقاس بنصف القوس ب ح والثانية تقاس بنصف القوس ء هـ

وهذه القضية تكون صحيحة أيضاً اذا كان احد ضلعي الزاوية أو ضلعاها معاً مماسين للمحيط ويستدل على ذلك بالبرهان المتقدم فيه

(نتيجه) القوس ب ا ح هو المحل الهندسي لرؤس الزوايا التى كل منها يساوى الزاوية ح ء ب وضلعاها كل منهما يمران بالنقطتين ح , ب وذلك لثلاثة امور الاول أن كل زاوية مرسومة فى القطعة ب ا ح تساوى ح ء ب والثانى ان كل

زاوية رأسها داخل القطعة مثل حـ م ب اكبر من حـ ء ب لانه اذا مد حـ م على استقامته حتى قابل المحيط فى ه ووصل ه ب كانت الزاوية حـ م ب الخارجية عن المثلث م ه ب اكبر من الزاوية الداخلة م ه ب لكن الزاوية م ه ب = حـ ء ب فعلى ذلك يحدث

حـ م ب > حـ ء ب

والثالث انه يشاهد بمثل ما تقدم ان كل زاوية رأسها خارجة عن القطعة كالزاوية حـ ط ب تكون أصغر من الزاوية حـ ء ب

القضية الثانية والعشرون

نظرية

كل زاويتين متقابلتين من أى شكل رباعى ا ب حـ ء مرسوم فى دائرة تكونان مكملتين لبعضهما

وذلك لان الزاويتين المتقابلتين ا ء حـ , ا ب حـ تقاسان معا بنصف المحيط ا ب حـ ء

وبالعكس اذا كان فى الشكل الرباعى زاويتان ا ء حـ , ا ب حـ مكملتان لبعضهما كان هذا الشكل يمكن رسمه فى الدائرة

برهانه انه يمر محيط دائرة بالنقط الثلاث ا , ء , حـ فالزاوية ا ء حـ تقاس حينئذ بنصف القوس ا م حـ وعلى ذلك فالزاوية ا ب حـ المكملة لها تقاس بنصف القوس ا ء حـ الباقى أى تكون مساوية لكل من الزوايا

المرسومة فى القطعة ا م د ومن البديهى ان هذا لا يتأتى الا اذا كانت النقطة ب على القوس ا م د

(فى المسائل المتعلقة بالمقالة الاولى والثانية)

المسئلة الأولى

المطلوب تقسيم المستقيم المعلوم ا ب الى قسمين متساويين لذلك نجعل النقطتان ا , ب مركزين ونرسم قوسا دائرتين بنصف قطر اكبر من نصف ا ب فهذان القوسان يتقاطعان فى نقطة ؏ تكون متساوية البعد عن النقطتين ا , ب ثم يعين بالطريقة عينها فوق الخط ا ب أو تحته نقطة ثابتة هـ تكون متساوية البعد عن ا , ب فاذا وصل المستقيم ؏ هـ فانه يقطع ا ب على جزئين متساويين فى النقطة د

وذلك لانه من حيث ان كلا من النقطتين ؏ , هـ متساوية البعد عن النهايتين ا , ب فانه يجب وجودهما معا على العمود المقام على ا ب من منتصفه وحيث انه لا يمكن ان يوصل بين نقطتين معلومتين الا مستقيم واحد فالخط ؏ هـ يكون هو العمود المذكور نفسه أى الذى يقسم الخط ا ب الى جزئين متساويين فى النقطة د

المسئلة الثانية

المعلوم نقطة مثل ا على مستقيم مثل ب د والمطلوب اقامة عمود على هذا المستقيم

عن النقطة المذكورة

لذلك نؤخذ نقطتان مثل ب ، ح على بعدين متساويين من النقطة ا ثم نجعل النقطتان ب ، ح مركزين ونرسم قوسا دائرتين بنصف قطر اكبر من ب ا فهذان القوسان يتقاطعان فى نقطة ء اذا وصل بينهما وبين ا بالمستقيم ء ا كان هذا المستقيم هو العمود المطلوب

(تنبيه) العمل المذكور يستعمل فى تشكيل زاوية قائمة ب ا ء فى النقطة ا المفروضة على المستقيم المعلوم ب ح

المسئلة الثالثة

المعلوم نقطة مثل ا خارجة على المستقيم ب ء والمطلوب تنزيل عمود على هذا المستقيم من النقطة المذكورة

لذلك نجعل النقطة ا مركزا ونرسم قوس دائرة بنصف قطر يكون كبره كافيا لكون القوس يقطع ب ء فى نقطتين مثل ب ، ء وبعد ذلك تعين نقطة مثل هـ تكون متساوية البعد عن ب ، ء فاذا وصل المستقيم ا هـ كان هو العمود المطلوب

لان كلا من النقطتين ا ، هـ متساوية البعد عن النقطتين ب ، ء وبهذا يكون ا هـ عمودا على ب ء فى منتصفه

المسئلة الرابعة

المعلوم زاوية مثل ك والمطلوب تشكيل زاوية متساوية لها فى النقطة ا المفروضة على المستقيم ا ب

لذلك نجعل النقطة ك مركزاً وبنصف قطر حيثما اتفق يرسم القوس ى ل المنتهى بضلعى الزاوية ثم نجعل النقطة ا مركزاً وبنصف قطر ا ب = ك ى يرسم قوس ب و غير محدود وبعد ذلك يؤخذ نصف قطر يساوى الوتر ل ى ونجعل النقطة ب مركزاً ويرسم بنصف القطر المذكور قوس دائرة يقطع القوس الغير محدود ب و فى د فاذا وصل المستقيم ا د كانت الزاوية د ا ب مساوية للزاوية المعلومة ك

لأن نصفى قطرى القوسين ب د ، ل ى متساويان وكذا وتراهما فبذا يكونان متساويين (قضيه ٤ مقاله ٢) ومن ذلك تكون الزاويتان ب ا د ، ى ك ل متساويتين

المسئلة الخامسة

المطلوب تقسيم زاوية معلومة أو قوس معلوم الى قسمين متساويين

أولاً اذا لزم الامر لتقسيم القوس ا ب الى قسمين متساويين نجعل النقطتين ا ، ب مركزين وبنصف قطر واحد يرسم قوسان يتقاطعان فى د ويمد المستقيم ح د بين د والمركز ح فهذا المستقيم يقطع القوس ا ب على

قسمين متساويين في النقطة هـ

وذلك لان كلاً من النقطتين حـ , ء متساوية البعد عن النقطتين ا , ب اللتين هما نهايتا الوتر ا ب فعلى ذلك يكون الخط حـ ء عموداً على الوتر في منتصفه فيقسم القوس ا ب الى قسمين متساويين في النقطة هـ

ثانياً اذا لزم الامر لتقسيم الزاوية ا د ب الى قسمين متساويين يبتدأ برسم القوس ا ب بجعل الرأس د مركزاً ويجرى باقي العمل كما سبق ذكره فمن الواضح ان الخط د ء يقسم الزاوية ا د ب الى قسمين متساويين

(تنبيه) باجراء العمل عينه يمكن تقسيم كل من النصفين ا هـ , هـ ب الى قسمين متساويين وكذا كل من الاجزاء الحادثة وبهذا تقسم الزاوية المعلومة أو القوس المعلوم الى اربعة اقسام متساوية ثم الى ثمانية اقسام متساوية ثم الى ستة عشر من الاجزاء المتساوية وهكذا

المسئلة السادسة

المطلوب مد مستقيم يوازي مستقيماً معلوماً ب د من نقطة مفروضة ا

لذلك يؤخذ نصف قطر كبير بالكفاية ويجعل النقطة ا مركزاً ويرسم القوس الغير محدود هـ و ثم يجعل النقطة هـ مركزاً وبنصف القطر عينه يرسم القوس ا ح ويؤخذ هـ و = ا ح ويمد ا ء فيكون هذا المستقيم هو الموازي المطلوب

لانه اذا وصل اهـ يشاهد أن الزاويتين المتبادلتين الداخليتين ا هـ ح ، هـ ا ر متساويتان وبذا يكون المستقيمان ا ء ، هـ ح متوازيين (قضية ١٦ مقالة ١)

يستعمل عادة في حل هذه المسألة مثلث الرسم

ويشكل مثلث الرسم على شكل مثلث قائم الزاوية ح ء هـ وفي استعماله يطبق وتره على الخط ح ء المطلوب رسم مستقيم يوازيه من النقطة ا ويطبق ضلعه ح هـ على حرف مسطرة ثابتة ح م ثم يزحلق المثلث المذكور على طول المسطرة حتى أن وتره يمر بالنقطة ا فالمستقيم اءَ يكون موازيًا للمستقيم ح ء لان الزاويتين المتناظرتين ء ح م ، اءَ م متساويتان

المسألة السابعة

المعلوم زاويتان ا ، ب من مثلث والمطلوب ايجاد الزاوية الثالثة

لذلك يرسم مستقيم غير محدود مثل ء هـ و ويرسم في النقطة هـ زاوية ء هـ ح = ا وزاوية ح هـ ح = ب فالزاوية الباقية ح هـ و تكون هي الزاوية الثالثة المطلوبة لان مجموع هذه الثلاث زوايا يساوي زاويتين قائمتين

المسئلة الثامنة

المعلوم ضلعان ب , حـ من مثلث وكذا الزاوية ا المحصورة بينهما والمطلوب رسم المثلث

لذلك يرسم مستقيم غير محدود مثل د و ويرسم في النقطة د زاوية هـ د و تساوى الزاوية المعلومة ا وبعد ذلك يؤخذ د ط = ب , د ع = حـ ويوصل ط ع فالمثلث ط د ع يكون هو المثلث المطلوب .

المسئلة التاسعة

المعلوم من مثلث ضلع وزاويتان والمطلوب رسم المثلث

فالزاويتان المعلومتان اما ان تكونا مجاورتين للضلع المعلوم واما ان تكون احداهما مجاورة لهذا الضلع والاخرى مقابلة له ففى هذه الحالة يبحث عن الزاوية الثالثة كما في المسئلة المتقدمة وبذا تعلم الزاويتان المجاورتان للضلع المعلوم فاذا تقرر ذلك يمد مستقيم د هـ يساوى الضلع المعلوم وترسم زاوية في النقطة د تساوى احدى الزاويتين المجاورتين ويرسم في النقطة هـ زاوية د هـ ط تساوى الزاوية المجاورة الاخرى فالخطان د و , هـ ط يتقاطعان في ع فالمثلث د هـ ع يكون هو المثلث المطلوب

المسئلة العاشرة

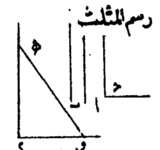
المعلوم من مثلث اضلاعه الثلاثة ا ، ب ، ح والمطلوب رسم هذا المثلث

لذلك يمد مستقيم د هـ يساوى الضلع ا
وتجعل النقطة هـ مركزاً ويرسم قوس دائرة بنصف
قطر يساوى الضلع الثانى ب ثم تجعل النقطة د
مركزاً ويرسم قوس أخر بنصف قطر يساوى الضلع الثالث ح فهذا القوس يقطع
القوس الاول فى النقطة و فاذا وصل المستقيمان د و ، هـ و فان المثلث د هـ و
يكون هو المثلث المطلوب

ولاجل ان تكون المسئلة ممكنة الحل يلزم تقاطع المحيطين المرسومين بجعل النقطتين
د ، هـ مركزين وهذا يستدعى (قضية ١٦ مقاله ٢) ان يكون الضلع د هـ
أصغر من مجموع الضلعين الأخرين واكبر من فرقهما

المسئلة الحادية عشر

المعلوم من مثلث ضلعان ا ، ب والزاوية ح المقابلة للضلع ب والمطلوب
رسم المثلث



لذلك تعتبر حالتان
(الحالة الأولى) اذا كانت الزاوية ح قائمة
أو منفرجة يرسم زاوية هـ د و تساوى الزاوية ح
ويؤخذ د هـ = ا وتجعل النقطة هـ مركزاً ويرسم قوس دائرة بنصف قطر

يساوى الضلع المعلوم ب فهذا القوس يقطع د و فى و فاذا وصل هـ و
يكون د هـ و هو المثلث المطلوب

وفى هذه الحالة يلزم ان يكون الضلع ب اكبر من ا لانه لما كانت الزاوية حـ
قائمة أو منفرجة فانها تكون اكبر زوايا المثلث واذن يجب ان يكون الضلع المقابل
لها اكبر الاضلاع

(الحالة الثانية) اذا كانت الزاوية حـ
حادة وكان الضلع ب > ا فان العمل
عينه يكون صحيحا والمثلث د هـ و
يكون هو المثلث المطلوب

واما اذا كانت الزاوية حـ حادة والضلع ب < ا فان القوس الذى مركزه هـ
ونصف قطره هـ و = ب يقطع الضلع د و فى نقطتين و، ط موجودتين
فى جهة واحدة من د وعلى ذلك يوجد
مثلثان د هـ و، د هـ ط كل منهما يليق
بحل المسألة

(تنبيه) اذا كان الضلع ب أصغر من
العمود المنزل من هـ على الخط د و فان المسألة تكون غير ممكنة الحل فى
جميع الحالات

المسألة الثانية عشر

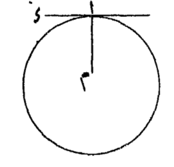
المطلوب ايجاد مركز دائرة معلومة أو قوس دائرة معلوم

لذلك يؤخذ على محيط الدائرة أو على القوس ثلاث نقط بالاختيار مثل ا، ب، د ويوصل أو يتصور وصل الخطين اب، ب د ويقسم كل من هذين المستقيمين الى قسمين متساويين بالعمودين ءه، وح فالنقطة م التى يتقابل فيها هذان العمودان تكون هى المركز المبحوث عنه

(تنبيه) يستعمل العمل المذكور فى رسم محيط دائرة يمر بثلاث نقط معلومة ا، ب، د ويستعمل أيضاً فى رسم محيط دائرة على مثلث معلوم اب د

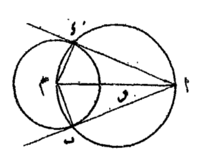
المسئلة الثالثة عشر

المطلوب مد مماس لدائرة معلومة من نقطة معلومة



اذا كانت النقطة ا موجودة على محيط الدائرة يوصل النصف قطر م ا ويقام العمود اء على م ا فهذا العمود يكون هو المماس المطلوب (قضيه ٩ مقاله ٢)

واما اذا كانت النقطة ا خارجة عن الدائرة فانه يمد المستقيم م ا بين المركز والنقطة ا ويقسم م ا الى قسمين متساويين بالنقطة و



وتجعل النقطة و مركزا ويرسم محيط دائرة بنصف القطر و م فهذا المحيط يقطع المحيط المعلوم فى النقطة ب فاذا وصل ا ب كان هو المماس المبحوث عنه

لانه اذا وصل م ب فان الزاوية م ب ا تكون قائمة بما انها مرسومة فى نصف المحيط (قضية ٩١ مقاله ٢) وعلى ذلك يكون ا ب عمودا على المنصف قطر م ب فى نهايته وبذا يكون مماسا

(تنبيه) اذا كانت النقطة ا خارجة عن الدائرة يشاهد انه يوجد دائما مماسان ا ب، ا ى يمران بالنقطة ا وهذان المماسان يكونان متساويين لان المثلثين م ب ا، م ى ا القائمى الزاوية مشتركان فى الوتر م ا والضلع م ب = م ى وبذا يكونان متساويين (قضيه ١٨ مقاله ١) ومن تساويهما يكون ا ى = ا ب وايضا تكون الزاوية م ا ى = م ا ب

المسئلة الرابعة عشر

المطلوب رسم دائرة فى مثلث معلوم ا ب ح

لذلك يمد المستقيمان ا م، ب م المنصفان للزاويتين ا، ب فهذان المنصفان يتقاطعان فى نقطة م تكون متساوية البعد عن الاضلاع الثلاثة ا ب، ا ح، ب ح

وعلى ذلك اذا انزل من هذه النقطة الاعمدة م ء , م و , م هـ على اضلاع المثلث فان هذه الاعمدة تكون متساوية ومحيط الدائرة المرسوم من المركز م بنصف القطر م ء يكون مماسا للاضلاع الثلاثة

(تنبيه ١) من حيث ان النقطة م متساوية البعد عن الضلعين ب حـ , ا حـ فانها توجد على منصف الزاوية حـ ومن ذلك يعلم ان الثلاثة مستقيمات المنصفة لزوايا أى مثلث تتقاطع جميعها فى نقطة واحدة

(تنبيه ٢) اذا مد منصفا الزاويتين الخارجتين لـ ب حـ , ب حـ هـ فان نقطة تقاطعهما وهى مَ تكون مركز الدائرة مماسة للضلع ب حـ ولامتدادى الضلعين الاخرين وبمثل هذا يوجد مركزان مً , مٌ لدائرتين اخريين كل منهما مماسة لضلع من الاضلاع المثلث ولامتداد الضلعين الاخرين

فعلى هذا يوجد على وجه العموم اربع دوائر مماسة لثلاث مستقيمات معلومة

المسئلة الخامسة عشر

المعلوم مستقيم مثل ا ب والمطلوب رسم قطعة دائرة عليه تقبل زاوية معلومة حـ اى قطعة دائرة كل زاوية رسمت فيها تكون مساوية للزاوية حـ

لذلك يمد ا ب من جهة ء ويرسم من النقطة ب زاوية ء ب هـ = حـ

ويقام العمود ب م على ب هـ والعمود ط م على منتصف ا ب ويجعل نقطة التقابل م مركزًا ويرسم محيط دائرة بنصف القطر م ب

فالقطعة اح ب تكون هي القطعة المطلوبة

لانه من حيث ان ب و عمودًا على النصف قطر م ب في نهايته فان ب و يكون مماسًا والزاوية ا ب و تقاس بنصف القوس اك ب (قضية ٢ مقاله ٢) ومع ذلك فان الزاوية المحيطية اح ب تقاس بنصف القوس اك ب ايضًا لمن ذلك تكون الزاوية اح ب = ا ب و = هـ ب د = ح وعلى هذا تكون كل زاوية مرسومة في القطعة اح ب مساوية للزاوية المعلومة ح

(تنبيه) اذا كانت الزاوية المعلومة قائمة فان القطعة المبحوث عنها تكون عبارة عن نصف الدائرة المرسومة على القطر ا ب

المسئلة السادسة عشر

المطلوب رسم مماس لمحيطي دائرتين

اولاً يفرض ان المسئلة محلولة وليكن ا اَ مماسًا خارجًا لمحيطي الدائرتين فاذا مد النصفا قطرين م ا , مَ اَ الوصلان لنقطتي التماس ومد المستقيم مَ ب الموازي للمماس ا اَ فان النصفي

قطرين م١ ، م َ١ َ يكونان عمودين على المستقيم م َ ب لكونهما عمودين على موازية ١١ َ فعلى ذلك يكون م َ ب مماساً لمحيط دائرة مركزه م ونصف قطره م ب = م١ − م َ١ َ

ومن هنا يستنتج العمل الآتى وهو ان يرسم محيط دائرة مركزه م بنصف قطر يساوى م١ − م َ١ َ ويمد من النقطة م َ مماس لهذا المحيط ومتى علمت النقطة ب يمد الخط م ب١ ويمد م َ١ َ يوازى م١ ويوصل ١١ َ

ومن هذا العمل يشاهد ان المسئلة تقبل حلين لانه يمكن مد مماسين للمحيط م ب من النقطة م َ ويشاهد أيضاً ان المسئلة لا تكون ممكنة الحل الا اذا كان م م َ ≥ م١ − م َ١ َ أى الا اذا كان المحيطان غير متباعدين فى الداخل

ثانياً لنتعرض لمد مماس داخل لمحيطى الدائرتين اللذين نصفا قطريهما م١ ، م َ ج

ولذا نفرض ان اج َ هو المماس المطلوب فاذا مد النصفا قطرين م١ ، م َ ج َ الواصلين لنقطتى التماس ومد المستقيم م َ ب الذى يوازى اج َ فان المستقيم م َ ب يكون عموداً على النصفا قطرين م١ ، م َ ج َ لان موازية اج َ عمود عليهما وعلى ذلك يكون م َ ب مماساً لمحيط دائرة مركزه م ونصف قطره م ب = م١ + ١ب = م١ + م َ ج َ

ومن حينئذٍ لأجل حل المسئلة يرسم محيط دائرة من المركز م بنصف قطر يساوي مجموع نصفي قطري المحيطين المعلومين ويمد من النقطة مَ مماس مَ ب لهذا المحيط وباقي العمل يجري نحوه كما سبق بيانه في الحالة المتقدمه

ولهذه المسئلة حلان أيضاً ولا تكون ممكنة الا اذا كانت م مَ ≤ م ا + مَ ع أي الا اذا كان المحيطان متباعدين أو متماسين في الخارج

المسئلة السابعة عشر

المطلوب ايجاد اعظم مقياس مشترك بين خطين مستقيمين مثل ا ب ، ح د وايجاد النسبة العددية الكائنة بين هذين الخطين

لذلك يقال إن اعظم مقياس مشترك بين خطين لا يتجاوز اصغرهما ح د لكنه يكون مساوياً ح د اذا كان اكبر الخطين وهو ا ب محتوياً على ح د مراراً صحيحة بالضبط

وعلى ذلك اذا طبق ح د على ا ب وفرض ان ا ب = ٢ ح د + ى ب فان اعظم مقياس مشترك بين الخطين ا ب ، ح د يكون مساوياً لاعظم مقياس مشترك بين الخطين ح د ، ى ب

لانه من حيث أن كل مقياس مشترك بين ا ب ، ح د يقسم ح د فانه يقسم ا ى أيضاً ومن حيث انه يقسم ا ب فان الباقي ى ب يكون محتوياً عليه مراراً صحيحة بالضبط وحينئذٍ هو مقياس مشترك بين ح د ، ى ب

وبالعكس كل مقياس مشترك بين ح د , ه ب يدخل في كل من ا ه , ه ب مرارًا صحيحة بالضبط وبناءً عليه يدخل كذلك في ا ب وحينئذٍ فهو مقياس مشترك بين ا ب , ح د

فعلى ما ذكر جميع المقاييس المشتركة بين ا ب , ح د هي المقاييس المشتركة بين ح د , ه ب بعينها وإذن يكون أعظم مقياس مشترك بين الخطين الاولين هو اعظم مقياس مشترك بين الخطين الاخرين

واذا نقل ه ب على ح د وفرض ان ح د = ه ب + ك د فانه يبرهن بمثل ما تقدم على ان اعظم مقياس مشترك بين ح د , ه ب هو اعظم مقياس مشترك بين ه ب , ك د

وأيضاً اذا نقل ك د على ه ب وفرض ان ه ب = ٢ ك د فان ك د يكون هو أعظم مقياس مشترك بين الخطين ا ب , ح د

ومع ذلك فانه ينتج من المتساويات السابقة ما هو آت

ح د = ٣ ك د

, ا ب = ٨ ك د

وإذن تكون نسبة الخطين ا ب , ح د هي $\frac{٨}{٣}$

(تنبيه) قد فرضنا فيما سبق انه صار الوصول في هذا العمل المسلسل على باقٍ مساوٍ للصفر ولنبرهن على ان الامر يكون كذلك دائماً متى كان للخطين مقياس مشترك وعلى انه في الحالة التي لا يكون للخطين فيها مقياس مشترك يتوصل

الى بواقٍ أصغر من اى مقدار مفروض فنقول

ليكن ح ، ء الخطين الجاري عليهما العمل و $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$ ، $ق_{٣}$ ، $ق_{٤}$ ، $ق_{٥}$ ، ...... $ق_{ن}$ البواقي المتعاقبة و $خ_{١}$ ، $خ_{٢}$ ، $خ_{٣}$ ، $خ_{٤}$ ، $خ_{٥}$ ، ...... $خ_{ن}$ خوارج القسمة فيحدث

$$ح = ء\,خ_{١} + ق_{١}$$
$$،\quad ء = ق_{١}\,خ_{٢} + ق_{٢}$$
$$،\quad ق_{١} = ق_{٢}\,خ_{٣} + ق_{٣}$$
$$،\quad ق_{٢} = ق_{٣}\,خ_{٤} + ق_{٤}$$
$$،\quad ....\,خ_{ن}$$

لكن $ق_{١} < \frac{ح}{٢}$ لانه اذا كان $ء < \frac{ح}{٢}$ فانه من باب أولى يكون $ق_{١} < \frac{ح}{٢}$ وان كان $ء > \frac{ح}{٢}$ كان $ق_{١} = ح - ء$ واذن يكون $ق_{١} < \frac{ح}{٢}$ ثم انه يحدث أيضاً

$$ق_{٣} < \frac{ق_{١}}{٢} \text{ ومنه } ق_{٣} < \frac{ح}{٤}$$
$$،\quad ق_{٥} < \frac{ق_{٣}}{٢} \text{ ومنه } ق_{٥} < \frac{ح}{٨}$$
$$،\quad ق_{٧} < \frac{ق_{٥}}{٢} \text{ ومنه } ق_{٧} < \frac{ح}{١٦}$$

وهكذا

ومن ذا يشاهد انه اذا امتدت العملية من غير نهاية صار الوصول الى بواقٍ صغيرة بقدر الارادة وعلى ذلك اذا وجد مقياس مشترك يتوصل الى باقٍ معدوم اذ بخلاف ذلك يصير الوقوع في بواقٍ أصغر من المقياس المشترك ومن البديهي ان هذا محال كما تقدم

وفى الحالة التى لا يكون فيها للخطين مقياس مشترك يمكن من بعد اجراء جملة عمليات حذف الباقى الاخير وحينئذٍ يستعمل الباقى السابق للاخير مقياسًا مشتركًا ويؤدى الى مقدار تقريبى للنسبة

المسئلة الثامنة عشر

المعلوم زاويتان مثل ا ، ب والمطلوب ايجاد المقياس المشترك بينهما ان كان بينهما مقياس مشترك وتعيين نسبتهما العددية من بعد ايجاده

لذلك يرسم قوسات د ى ، ه و بنصفى قطرين متساويين لاجل استعمالهما فى قياس هاتين الزاويتين ثم يجرى العمل فى مقارنة القوسين د ى ، ه و كما فى المسئلة المتقدمة اذ الاقواس التى انصاف أقطارها متساوية يمكن تطبيقها على بعضها مثل الخطوط المستقيمة وبهذا يتوصل الى المقياس المشترك بين القوسين د ى ، ه و ان كان بينهما مقياس مشترك وبه يتحصل على نسبتهما العدديه فهذه النسبة تكون متساوية لنسبة الزاويتين المفروضتين (١٨ مقاله ٢) واذا فرض ان ى ح هو المقياس المشترك بين القوسين فان ى ا ح تكون هى المقياس المشترك بين الزاويتين وان لم يوجد بين القوسين مقياس مشترك فلا يوجد للزاويتين مقياس مشترك ولا يتوصل الا الى مقدار تقريبى لنسبتهما

المقالة الثالثة
فى مساحة المضلعات وفى التشابه

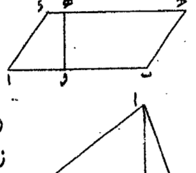
تعاريف

(١) مساحة شكل ما هى نسبة امتداده الى امتداد وحدة السطوح (مساحة الشكل وسطحه بمعنى واحد)

(٢) الشكلان المتكافئان هما شكلان مساحتهما واحدة

وقد يمكن تكافؤ الشكلين وان كانا مختلفى الهيئة مثلاً يمكن ان تكافئ الدائرة مربعاً والمثلث مستطيلاً وهكذا

واسم الشكلين المتساويين يختص بالشكلين اللذين اذا طبق احدهما على الآخر اتحدا فى جميع نقطهما وذلك كالدائرتين اللتين نصفا قطريهما متساويين وكالمثلثين اللذين اضلاعهما المتناظرة متساوية وهكذا



(٣) ارتفاع متوازى الاضلاع هو العمود هـ و الدال على بعد ضلعين متقابلين مثل ا ب ، حـ د متخذين قاعدتين له

(٤) ارتفاع المثلث هو العمود ا د المنزل من رأس زاوية من زواياه مثل ا على الضلع المقابل لها ب حـ المتخذ قاعدة للمثلث

(٥) ارتفاع شبيه المنحرف هو العمود هـ و المحصور بين ضلعيه المتوازيين ا ب ، حـ ء

القضية الأولى

نظرية

متوازيا الأضلاع المتساويان في القاعدة والارتفاع يكونان متكافئين

لنكن ا ب القاعدة المشتركة بين متوازى الاضلاع ا ب حـ ء ، ا ب هـ و فمن حيث ان ارتفاعيهما متساويان بالفرض فان القاعدتين العليتين وهما حـ ء ، هـ و توجدان على مستقيم واحد يوازى ا ب لكن من خاصية متوازى الاضلاع يحدث اء = ب حـ ، او = ب هـ ومن الخاصية عينها يحدث ء حـ = ا ب ، و هـ = ا ب فمن هذا يكون ء حـ = و هـ فاذا طرح ء حـ ، و هـ من ء هـ كان الباقيان حـ هـ ، ء و متساويين

ومن هنا ينتج ان الاضلاع المتناظرة في المثلثين ء ا و ، حـ ب هـ متساوية وبذا يكون هذان المثلثان متساويين لكن اذا طرح المثلث اء و من رباعى الاضلاع ا ب هـ ء يبقى متوازى الاضلاع ا ب هـ و واذا طرح المثلث حـ ب هـ من رباعى الاضلاع ا ب هـ ء عينه يبقى متوازى الاضلاع ا ب حـ ء فعلى ذلك يكون متوازيا الاضلاع ا ب حـ ء ، ا ب هـ و المتساويان في القاعدة والارتفاع متكافئين

(نتيجه) أى متوازى اضلاع مثل ا ب د ى يكون مكافئاً للمستطيل ا ب هـ و المتحد معه فى القاعدة والارتفاع

القضية الثانية
نظرية

أى مثلث كالمثلث ا ب د يكون نصف متوازى الاضلاع ا ب د ى المتحد معه فى القاعدة والارتفاع

لان المثلثين ا ب د , ا د ى متساويان (قضيه ٣١ مقاله ١)

(نتيجه ١) المثلث ا ب د نصف المستطيل ب د هـ و المتحد معه فى القاعدة ب د والارتفاع اع لان المستطيل ب د هـ و يكافئ متوازى الاضلاع ا ب د ى

(نتيجه ٢) جميع المثلثات المتساوية فى القاعدة والارتفاع متكافئة

القضية الثالثة
نظرية

نسبة المستطيلين المتحدين فى الارتفاع كنسبة قاعدتيهما

ليكن ا ب د ى , ا هـ و ى مستطيلين متحدين

فى الارتفاع ا ى فنسبتهما الى بعضهما كنسبة قاعدتيهما اب و اهـ

لانه لو فرض فى مبدأ الأمر انه يوجد مقياس مشترك بين القاعدتين اب واهـ بانه كانت نسبة هاتين القاعدتين كنسبة العددين ٧ و ٤ مثلاً وقسم اب سبعة أقسام متساوية فان اهـ يكون محتوياً على اربعة من هذه الاقسام واذا أقيم عمود على القاعدة فى كل نقطة من نقط التقسيم حدث بهذا سبع مستطيلات جزئية كلها متساوية لان قواعدها وارتفاعاتها متساوية فالمستطيل اب د ى يحتوى على سبع مستطيلات جزئية وأما المستطيل اهـ و ى فانه يحتوى على اربع منها وعلى ذلك تكون نسبة المستطيل اب د ى الى المستطيل اهـ و ى كنسبة ٧ الى ٤ أى كنسبة اب الى اهـ

[illegible] يوجد مقياس مشترك بين القاعدتين اب و اهـ فانه يبرهن بالدليل الذى سبق استعماله (قضية ١٨ مقاله ٢) على ان القضية لم تزل صحيحة

القضية الرابعة
نظرية

نسبة أى مستطيل الى اخر كنسبة حاصل ضرب قاعدة الاولى فى ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدة الثانى فى ارتفاعه

ليكن م و مَ سطحى المستطيلين ، ق و ر بعدى المستطيل الاول ، قَ و رَ بعدى المستطيل الثانى

ولنتصور مستطيلاً ثالثاً مَ متحداً مع الاول فى القاعدة ق ومتحداً مع

الثانى فى الارتفاع $\acute{ر}$

فعلى مقتضى النظرية المتقدمة يحدث

$$\frac{م}{م''} = \frac{ر''}{\acute{ر}}$$

و

$$\frac{م''}{\acute{م}} = \frac{ه}{\acute{ه}}$$

فاذا ضرب هذان المتناسبان فى بعضهما حدا بحد ثم قسم حد النسبة الاولى على م'' يحدث

$$\frac{م}{\acute{م}} = \frac{ه \times ر}{\acute{ه} \times \acute{ر}} \quad (١)$$

فى قياس المستطيل

قياس مستطيل ما م معناه ايجاد نسبته الى مستطيل آخر $\acute{م}$ مأخوذ وحدة فعلى مقتضى النظرية المتقدمة يستحصل على هذه النسبة بالبحث عن عدد احتواء الخطوط ه , ر , $\acute{ه}$, $\acute{ر}$ على وحدة واحدة وبقسمة حاصل ضرب العددين الاولين على حاصل ضرب العددين الاخرين

فاذا فرض ان ه = ٦م , ر = ٤م , $\acute{ه}$ = ٣م , $\acute{ر}$ = ٢م

يحدث

$$\frac{م}{\acute{م}} = \frac{٦ \times ٤}{٣ \times ٢} = ٤$$

وعلى هذا يكون المستطيل م محتويا على المستطيل المأخوذ وحدة ٤ مرات

ووحدة السطوح المتخذة فى العادة هى المربع الذى ضلعه وحدة الاطوال

ومن حينئذ يؤل العددان الدالان على $\acute{ه}$, $\acute{ر}$ الى الوحدة ويصير التناسب (١) هكذا

$$\frac{م}{\acute{م}} = \frac{ه \times ر}{١}$$

ومن ذا يشاهد ان نسبة اى مستطيل الى المربع المنشأ على وحدة الاطوال تساوى

حاصل ضرب العددين الدالين على عدد احتواء القاعدة والارتفاع على الوحدة الخطية وهذا يعبر عنه على سبيل الاختصار بان يقال أن مساحة المستطيل يساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه

فاذا فرض ان ق = ٥٣ ر٣م , س = ٢٥ ر ٢م كان سطح المستطيل مساوياً ٩٤٢٥ ر ٧ أمتار مربعة أى ٢٥ سنتمتر مربع و ٩٤ ديسميتر مربع و٧ أمتار مربعة ويكتب على سبيل الرمز هكذا سم٢ ٢٥ دم٢ ٩٤ م٢ ٧

القضية الخامسة

نظرية

مساحة متوازى الاضلاع تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه

لان متوازى الاضلاع ا ب ح ى يكافئ المستطيل ا ب هـ و المتحد معه فى القاعدة ا ب وفى الارتفاع ب هـ وحيث ان مساحة هذا المستطيل تساوى ا ب × ب هـ فيكون هذا الحاصل عينه مساوياً لمساحة متوازى الاضلاع ا ب ح ى

(نتيجة) النسبة بين متوازيى الاضلاع المتحدين فى القاعدة كالنسبة بين ارتفاعيهما والنسبة بين متوازيى الاضلاع المتحدين فى الارتفاع كالنسبة بين قاعدتيهما

لانه اذا جعل ح , ى , هـ رموزاً للمقادير حيثما اتفقت يحدث على وجه العموم ما هو آت

$$\frac{ح \times هـ}{ى \times هـ} = \frac{ح}{ى}$$

القضية السادسة

نظرية

مساحة اى مثلث تساوى حاصل ضرب قاعدته فى نصف ارتفاعه

لان المثلث ا ب د نصف متوازى الاضلاع ا ب د ه المتحد معه فى القاعدة ب د وفى الارتفاع ا ء وحيث ان سطح متوازى الاضلاع = ب د × ا ء (قضيه ٥)

فيكون سطح المثلث = ½ ب د × ا ء = ب د × ½ ا ء

(نتيجه) النسبة بين المثلثين المتحدين فى الارتفاع كالنسبة بين قاعدتيهما والنسبة بين المثلثين المتحدين فى القاعدة كالنسبة بين ارتفاعيهما

القضية السابعه

نظريه

مساحة شبيه المنحرف ا ب د ء تساوى حاصل ضرب ارتفاعه ه و فى نصف مجموع القاعدتين المتوازيتين ا ب و د ء

برهانه ان نمد من النقطة ـه التى هى منتصف د ب مستقيم ك ل يوازى الضلع ا ء ونمد ء د حتى يقابل ك ل

فالمثلثان ـه ب ل و ـه د ك يكونان متساويين لان الضلع ـه ب = ـه د بالعمل والزاوية ل ـه ب = د ـه ك والزاوية ـه ب ل = ـه د ك

من متوازى حـك , ب ل فعلى ذلك يكون شبيه المنحرف ا ب حـ ء مكافياً لمتوازى الاضلاع ا ء ك ل وبذا تكون مساحته هى هـ و × ا ل

لكن ا ل = ء ك ومن تساوى المثلثين ب ـ ل , ك حـ ـ يكون الضلع ب ل = حـ ك

فاذن يكون ا ب + حـ ء = ا ل + ء ك = ٢ ا ل ومن ذا يشاهد أن ا ل نصف مجموع القاعدتين ا ب , حـ ء وحينئذٍ تكون مساحة شبيه المنحرف ا ب حـ ء مساوية لحاصل ضرب الارتفاع هـ و فى نصف مجموع القاعدتين ا ب , حـ ء وهذا يعبر عنه هكذا ا ب حـ ء = هـ و × ((ا ب + حـ ء) / ٢)

(تنبيه) اذا مد من النقطة ـ التى هى منتصف ب حـ مستقيم ـ ع يوازى القاعدة ا ب فان النقطة ع تكون منتصف ا ء أيضاً لان الشكل ا ع ـ ل متوازى الاضلاع وكذا الشكل ء ع ـ ك لان الاضلاع المتقابلة متوازية فعلى ذلك يكون ا ع = ـ ل , ء ع = ـ ك

وحيث أن ـ ل = ـ ك لتساوى المثلثين ب ـ ل , حـ ـ ك فيكون ا ع = ء ع

وحيث ان الخط ـ ع = ا ل = (ا ب + حـ ء) / ٢ فيمكن التعبير عن مساحة شبيه المنحرف أيضاً بهذا الحاصل هـ و × ع ـ الذى يستدل منه على ان المساحة المذكورة تساوى حاصل ضرب ارتفاع شبيه المنحرف فى الخط الواصل بين منتصفى الضلعين الغير متوازيين

القضية الثامنة
نظرية

اذا قسم الخط اد الى قسمين مثل اب , ب د فان المربع المنشأ على الخط الكلى يحتوى على المربع المنشأ على احد الجزئين اب وعلى المربع المنشأ على الجزء الآخر ب د وعلى ضعف المستطيل المكون من الجزئين اب , اد وهذا يعبر عنه هكذا

اد² أو (اب + ب د)² = اب² + ب د² + ٢ اب × ب د

وذلك لانه اذا انشأ المربع ا د ى هـ واخذ او = اب ومد وط موازياً اد , ب ح موازياً اه فينقسم المربع ا د ى هـ الى اربعة اجزاء الاول اب ك و وهو المربع المنشأ على اب لانه قد أخذ او = اب والثانى ك ط ى ح وهو المربع المنشأ على ب د لانه لما كان اد = اه , اب = او كان الفرق اد - اب مساوياً للفرق اه - او ومن هذا يحدث ب د = هو لكن بسبب التوازى يكون ك ط = ب د , ى ط = هو فعلى ذلك يكون ح ك ط ى مساوياً للمربع المنشأ على ب د فاذا طرح هذان المربعان من المربع الكلى يبقى المستطيلان ب د ط ك , هـ و ك ح المساوى كل منهما اب × ب د وبذا يثبت المطلوب

(تنبيه) اذا جعل د , ى رمزين للعددين الدالين على جزئى الخط اد فان الضرب الجبرى ينتج منه المتساوية الآتية وهى (د + ى)² = د² + ى² + ٢ د ى

واذا فرض ان مساحة المستطيل معلومة فان هذه المتساوية يحدث عنها برهان ثان للنظرية المذكورة ويجب الاتيان بمثل هذه الملحوظة فى حق النظريتين الآتيتين

القضية التاسعة

نظرية

اذا كان الخط اد هو الفرق بين الخطين اب , ب د فان المربع المنشأ على اد يحتوى على مربع اب وعلى مربع ب د مطروحا منهما ضعف مستطيل الخطين اب , ب د أى انه يحدث $\overline{\text{اد}}^2$ أو $(\text{اب} - \text{ب د})^2 = \overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{ب د}}^2 - 2\,\text{اب} \times \text{ب د}$

برهانه ان ينشأ المربع اب ح و وان يؤخذ اه = اد وان يمد خط د ط موازيا ب ح , ح ك موازيا اب ثم يجرى تكميل المربع ه و ل ك

فبذا يكون كل من المستطيلين د ب ح ط , ط ل ك د مساويا اب×ب د فاذا طرحا من الشكل الكلى اب ح ل ك ه ا الذى مقداره $\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{ب د}}^2$ فمن الواضح انه يبقى المربع ا د د ه وبذا يثبت المطلوب

(تنبيه) هذه القضية تستنتج أيضا من القانون الجبرى الآتى وهو

$$(\text{ح} - \text{ى})^2 = \text{ح}^2 + \text{ى}^2 - 2\,\text{ح}\,\text{ى}$$

القضية العاشرة

نظرية

المستطيل المكون من مجموع وتفاضل خطين مثل اب , ب د يساوى فرق مربعى هذين

الخطين بحيث يكون (اب + بح) × (اب − بح) = اب² − بح²

وبرهان ذلك ان يرسم المربعات اب ىو , اح ده على اب , اح بالتناظر وان يمد اب بكمية بك = بح ثم يكمل المستطيل اك ل ه فقاعدة المستطيل وهى اك كناية عن مجموع الخطين اب , بح وارتفاعه اه هو فرق هذين الخطين واذن فالمستطيل اك ل ه = (اب + بح) × (اب − بح)

لكن هذا المستطيل مركب من جزئين اح ح ه + بح ل ك وحيث ان الجزء بح ل ك يساوى المستطيل ه ط و اذ بح = ده , بك = ه و فيكون اك ل ه = اح ح ه + ه ط و ومن الواضح ان هذين الجزئين كناية عن المربع اب ى و مطروحا منه ح ى ط الذى هو المربع المنشأ على بح فمن حينئذ يكون

(اب + بح) × (اب − بح) = (اب² − بح²)

(تنبيه) هذه القضية تستنتج أيضاً من القانون الجبرى الاتى وهو

(ح − د) (ح + د) = ح² − د²

القضية الحادية عشر

نظرية

مربع وتر المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع مربعى الضلعين الاخرين

ليكن ا ب ج مثلثاً قائم الزاوية في ا فمن بعد رسم مربعات على الاضلاع الثلاثة ينزل العمود ا د على الوتر من رأس الزاوية القائمة ويمد العمود المذكور الى هـ ثم بعد ذلك يوصل القطران ا و , ج ح

فبذا تكون الزاوية ا ب و مركبة من الزاوية ا ب ج ومن الزاوية القائمة ج ب و وتكون الزاوية ج ب ح مركبة من الزاوية ا ب ج المذكورة ومن الزاوية القائمة ا ب ح واذن تكون الزاوية ا ب و = ح ب ج لكن ا ب = ب ح لانهما ضلعا من مربع واحد وكذا ب و = ب ج فعلى ذلك يكون في المثلثين ا ب و , ح ب ج زاويتان متساويتان محصورتان بين اضلاع متساوية وبذا يكونان متساويين (قضية ٥ مقالة ١)

وبذا يشاهد ان المثلث ا ب و نصف المستطيل ب د هـ و (أو بالاختصار ب هـ) المتحد معه في القاعدة ب و والارتفاع ب د (قضية ٢) وان المثلث ح ب ج أيضاً هو نصف المربع ا ح لانه من كون الزاوية ب ا ج قائمة وكذا الزاوية ب ا ل يكون ج ا ل مستقيماً واحداً موازياً ح ب وعلى ذلك فالمثلث ح ب ج والمربع ا ح المتحدان في القاعدة ب ح يكونان متحدين أيضاً في الارتفاع ا ب وبذا يكون المثلث نصف المربع

وحيث قد سبق الاثبات على ان المثلث ا ب و يساوي المثلث ح ب ج فعلى ذلك يكون

المستطيل ب ء ه و الذى هو ضعف المثلث ا ب و مكافئاً للمربع اج الذى هو ضعف المثلث ج ب ح ويبرهن بمثل ما ذكر على ان المستطيل ح ء ه ط يكافئ المربع اے لكن المستطيلان ب ء ه و , ح ء ه ط باجتماعهما مع بعضهما يكونان المربع ب ح ط و فحينئذٍ يكون المربع ب ح ط و المنشأ على الوتر مساوياً لمجموع المربعين اب ج ل , ا ح ے ک المنشأين على الضلعين الآخرين

وحيث ان مساحة المربع كناية عن مربع العدد الدال على ضلعه فتحدث المتساوية $\overline{بح}^2 = \overline{اب}^2 + \overline{اح}^2$ التى معناها ان مربع العدد الدال على الوتر يساوى مجموع مربعى العددين الدالين على الضلعين الآخرين

(نتيجه ١) مربع أحد ضلعى الزاوية القائمة يساوى مربع الوتر ناقصاً مربع الضلع الآخر وهذا يعبر عنه هكذا $\overline{اب}^2 = \overline{بح}^2 - \overline{اح}^2$

(نتيجه ٢) ليكن ا ب ح ء مربعاً و اح قطره فمن كون المثلث ا ب ح قائم الزاوية ومتساوى الساقين يحدث $\overline{اح}^2 = \overline{اب}^2 + \overline{بح}^2 = 2\,\overline{اب}^2$ ومن ذا يعلم ان المربع المنشأ على القطر اح ضعف المربع المنشأ على الضلع اب

وبما ان $\frac{\overline{اح}^2}{\overline{اب}^2} = \frac{2}{1}$

فانه باستخراج الجذر التربيعى يحدث $\frac{اح}{اب} = \sqrt{2}$

ومن ذا يعلم انه لا يوجد مقياس مشترك بين قطر المربع وضلعه

(نتيجه ٣) قد ثبت ان المربع اج يكافئ المستطيل ب ء ه و فمن حيث

ان نسبة المربع ب د ط و الى المستطيل ب ذ هـ و
كنسبة القاعدة ب د الى القاعدة ب ذ
لداعى الارتفاع المشترك ب و فانه يحدث

$$\frac{\overline{بد}^2}{\overline{اب}^2} = \frac{دب}{بذ}$$

ومن ذا يعلم ان نسبة مربع الوتر الى مربع احد ضلعى الزاوية القائمة كنسبة الوتر الى القطعة المجاورة لهذا الضلع والقطعة هنا هى جزء الوتر المعين بالعمود المنزل من رأس الزاوية القائمة فعلى هذا ب ذ هى القطعة المجاورة للضلع اب, ذ د هى القطعة المجاورة للضلع ا د وبمثل ما ذكر يحدث

$$\frac{\overline{بد}^2}{\overline{اد}^2} = \frac{بد}{دذ}$$

(نتيجه ٤) حيث ان المستطيلين ب ذ هـ و, ذ د ط هـ متحدان فى الارتفاع تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما ب ذ, د ذ وحيث أن هذين المستطيلين مكافيان للمربعين $\overline{اب}^2$, $\overline{اد}^2$ يحدث

$$\frac{\overline{اب}^2}{\overline{اد}^2} = \frac{بذ}{ذد}$$

ومن ذا يعلم ان النسبة بين مربعى ضلعى الزاوية القائمة كالنسبة بين قطعتى الوتر المجاورتين لهذين الضلعين

تعريف

مسقط مستقيم مثل اب على آخر مثل د ذ هو الجزء أَبَ المحصور بين موقعى العمودين المنزلين من النقطتين

ا ب على المستقيم حـ ء .

القضية الثانية عشر

نظرية

في كل مثلث مربع الضلع المقابل لزاوية حادة يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين ناقصاً ضعف المستطيل المكون من احد هذين الضلعين ومن مسقط الآخر على الاول

فاذا كانت حـ زاوية حادة في المثلث ا ب حـ وانزل العمود ا ء على ب حـ يكون $\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{اح}}^2 + \overline{\text{بح}}^2 - 2\,\text{بح} \times \text{حء}$

وللبرهنة على ذلك تعتبر حالتان

(الحالة الاولى) اذا وقع العمود داخل المثلث ا ب حـ فانه يحدث ب ء = ب حـ − حـ ء وإذن (قضيه ٩) يكون $\overline{\text{بء}}^2 = \overline{\text{بح}}^2 + \overline{\text{حء}}^2 - 2\,\text{بح} \times \text{حء}$

فاذا اضيف $\overline{\text{اء}}^2$ على الطرفين ولوحظ ان المثلثين ا ب ء , ا ء حـ القائمي الزاوية يأتي منهما $\overline{\text{اء}}^2 + \overline{\text{بء}}^2 = \overline{\text{اب}}^2$, $\overline{\text{اء}}^2 + \overline{\text{ءح}}^2 = \overline{\text{اح}}^2$

فانه يحدث $\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{بح}}^2 + \overline{\text{اح}}^2 - 2\,\text{بح} \times \text{حء}$

(الحالة الثانية) اذا وقع العمود ا ء خارج المثلث ا ب حـ كان ب ء = حـ ء − ب حـ

وإذن (قضية ٩) يكون $\overline{\text{بء}}^2 = \overline{\text{حء}}^2 + \overline{\text{بح}}^2 - 2\,\text{حء} \times \text{بح}$

فاذا اضيف $\overline{\text{اء}}^2$ للطرفين يستنتج بمثل ما ذكر ان

$\overline{اب}^2 = \overline{بح}^2 + \overline{اح}^2 - ٢ بح \times ح ى$

القضية الثالثة عشر

نظرية

فى كل مثلث منفرج الزاوية مربع الضلع المقابل للزاوية المنفرجة يساوى مجموع مربعى الضلعين الآخرين زائداً ضعف المستطيل المكون من احد هذين الضلعين ومن مسقط الآخر على الاول

فان كان اب الضلع المقابل للزاوية المنفرجة ح من المثلث ابح ومد اى عموداً على بح يكون

$\overline{اب}^2 = \overline{اى}^2 + \overline{بى}^2 + ٢ بح \times ح ى$

وللبرهنة على ذلك يقال انه لا يمكن وقوع العمود داخل المثلث اذ لو وقع فى ه مثلاً لوجدت الزاوية القائمة ه والزاوية المنفرجة ح معاً فى المثلث اح ه وهو محال فعلى ذلك يقع فى الخارج ويحدث بى = بح + ح ى ومن هذا يستنتج (قضيه ٨) ما هو آت

$\overline{بى}^2 = \overline{بح}^2 + \overline{حى}^2 + ٢ بح \times ح ى$

وباضافة $\overline{اى}^2$ للطرفين واجراء الاختصار كما فى النظرية المتقدمة ينتج ان

$\overline{اب}^2 = \overline{بح}^2 + \overline{اح}^2 + ٢ بح \times ح ى$

(تنبيه) المثلث القائم الزاوية هو الذى يكون فيه دون غيره مجموع مربعى ضلعين يساوى مربع الضلع الثالث لانه اذا كانت الزاوية المحصورة بين هذين الضلعين

حادة كان مجموع مربعيهما اكبر من مربع الضلع المقابل لها واذا كانت منفرجة كان المجموع المذكور اقل من ذلك

القضية الرابعة عشر

نظريه

في أي مثلث مثل ا ب ح اذا مد الخط ا ه من رأسه الى منتصف قاعدته فانه يحدث

اب٢ + اح٢ = ٢ اه٢ + ٢ به٢

وللبرهنة على ذلك ينزل العمود اد على ب ح فعلى مقتضى النظرية الثانية عشر يحدث من المثلث اهح ما هو آت

اح٢ = اه٢ + هح٢ − ٢ هح × ه د

وعلى مقتضى النظرية الثالثة عشر يحدث من المثلث ا ب ه ما هو آت

اب٢ = اه٢ + هب٢ + ٢ هب × ه د

وحينئذٍ اذا جمع ولوحظ ان ه ب = ه ح يحدث

اب٢ + اح٢ = ٢ اه٢ + ٢ هب٢

القضية الخامسة عشر

نظريه

في كل شكل رباعي مجموع مربعات اضلاعه الاربعة يساوي مجموع مربعي قطريه زائداً أربعة أمثال مربع الخط الواصل بين منتصفيهما

ليكن اح , بد قطرى الشكل الرباعى ا ب ح د
و , و , هـ منتصفيهما ولنصل الخطوط بو , دو
, وهـ

فعلى مقتضى النظرية المتقدمة يحدث

من المثلث ا ب ح $\quad \overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{بح}}^2 = 2\,\overline{\text{بو}}^2 + 2\,\overline{\text{او}}^2$

ومن المثلث ا د ح $\quad \overline{\text{اد}}^2 + \overline{\text{دح}}^2 = 2\,\overline{\text{دو}}^2 + 2\,\overline{\text{او}}^2$

وبالجمع يحدث

$$\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{بح}}^2 + \overline{\text{اد}}^2 + \overline{\text{دح}}^2 = 2(\overline{\text{بو}}^2 + \overline{\text{دو}}^2) + 4\,\overline{\text{او}}^2$$

وحيث انه يحدث من المثلث ب و د ما هو آت

$$\overline{\text{بو}}^2 + \overline{\text{دو}}^2 = 2\,\overline{\text{به}}^2 + 2\,\overline{\text{وه}}^2$$

يكون

$$\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{بح}}^2 + \overline{\text{اد}}^2 + \overline{\text{دح}}^2 = 4\,\overline{\text{به}}^2 + 4\,\overline{\text{وه}}^2 + 4\,\overline{\text{او}}^2$$

وحيث ان

$$\overline{\text{اح}}^2 = 4\,\overline{\text{او}}^2 \,,\quad \overline{\text{بد}}^2 = 4\,\overline{\text{به}}^2$$

يحدث اخيرا

$$\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{بح}}^2 + \overline{\text{اد}}^2 + \overline{\text{دح}}^2 = 4\,\overline{\text{وه}}^2 + \overline{\text{بد}}^2 + \overline{\text{اح}}^2$$

(نتيجه) اذا كان الشكل الرباعى متوازى الاضلاع فان المستقيم هـ و يكون معدوما وبهذا يعلم انه فى كل متوازى اضلاع مجموع مربعات الاضلاع الاربعة

يساوي مجموع مربعي القطرين

وعكس هذه النظرية الاخيرة صحيح

في الخطوط المتناسبة وفي التشابه

القضية السادسة عشر

نظرية

كل مستقيم وازى احد اضلاع مثلث يقسم الضلعين الاخرين الى اجزاء متناسبة

لانه اذا وصل ب هـ , د ح كان المثلثان ب د هـ , د هـ ح متحدين في القاعدة د هـ ومتحدين في الارتفاع أيضاً لوجود الرأسين ب , ح على مستقيم موازٍ للقاعدة

فعلى هذا يكون المثلثان المذكوران متكافئين

والمثلثان ا د هـ , ب د هـ المشتركان في الرأس هـ متحدان في الارتفاع تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما ا د , د ب بمعنى ان

$$\frac{ا د هـ}{ب د هـ} = \frac{ا د}{د ب}$$

والمثلثان ا د هـ , د هـ ح المشتركان في الرأس د متحدان في الارتفاع أيضاً فتكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما ا هـ , هـ ح بمعنى ان

$$\frac{ا د هـ}{د هـ ح} = \frac{ا هـ}{هـ ح}$$

فبسبب تساوي المثلثين ب د هـ , د هـ ح ووجود النسبة المشتركة بين هذين التناسبين يحدث $\frac{ا د}{د ب} = \frac{ا هـ}{هـ ح}$

(نتيجه ١) ينتج مما ذكر ان $\frac{اد}{اد+دب} = \frac{اه}{اه+هح}$ اى $\frac{اد}{اب} = \frac{اه}{اح}$

وان $\frac{اد+دب}{دب} = \frac{اه+هح}{هح}$ اى $\frac{اب}{دب} = \frac{اح}{هح}$

(نتيجه ٢) اجزاء المستقيمين اب ، حد المعينة بجملة مستقيمات متوازيه مثل اح ، هو ، طح ، ب د ، .... الخ تكون متناسبة

لانه اذا كانت ن نقطة تقابل المستقيمين اب ، حد فان المثلث ن ه و يكون فيه الخط اح موازياً للقاعدة ه و ومن ذا يحدث $\frac{نه}{نو} = \frac{اه}{حو}$ ومن المثلث ن طح يحدث ايضاً $\frac{نه}{نو} = \frac{طه}{وح}$

فبسبب النسبة المشتركة يحدث $\frac{اه}{حو} = \frac{طه}{وح}$

وبمثل ذلك يبرهن على ان $\frac{طه}{وح} = \frac{بط}{حد}$ وبذا يثبت المطلوب

القضـية السابع عشر

نظريه

اذا (بعكس ما تقدم) كان المستقيمان اب ، اح مقطوعين على التناسب بالخط ده اى اذا كان $\frac{اد}{دب} = \frac{اه}{هح}$ فان الخط ده يكون موازياً للقاعدة ب ح

لانه اذا لم يكن ده موازياً ب ح وفرض ان دو هو الموازى له فانه على مقتضى النظرية المتقدمة يحدث هذا التناسب

 احمد نجيب

$$\frac{\text{اد}}{\text{ب د}} = \frac{\text{او}}{\text{و ح}}$$

لكن بالفرض $\frac{\text{اد}}{\text{ب د}} = \frac{\text{اهـ}}{\text{هـ ح}}$

فعلى ذلك يحدث $\frac{\text{او}}{\text{و ح}} = \frac{\text{اهـ}}{\text{هـ ح}}$

وهو تناسب لا يمكن حصوله لأن المقدم ا هـ اكبر من ا و من جهة والتالي هـ ح أصغر من و ح من الجهة الأخرى وحينئذٍ لا يمكن ان يكون الموازي د و الممتد من د مختلفاً عن د هـ وبناءً عليه يكون د هـ هو الموازي المذكور

(تنبيه) الامر يكون كما ذكر اذا فرض التناسب $\frac{\text{اب}}{\text{اد}} = \frac{\text{اح}}{\text{اهـ}}$

لانه من هذا التناسب يحدث $\frac{\text{اب} - \text{اد}}{\text{اد}} = \frac{\text{اح} - \text{اهـ}}{\text{اهـ}}$ أو $\frac{\text{ب د}}{\text{اد}} = \frac{\text{ح هـ}}{\text{اهـ}}$

أو $\frac{\text{اد}}{\text{ب د}} = \frac{\text{اهـ}}{\text{ح هـ}}$

القضية الثامنة عشر

نظرية

المستقيم ا د المنصف للزاوية ا من المثلث اب ح يقسم القاعدة ب ح الى جزئين ب د ، د ح متناسبين للضلعين اب ، اح

والمستقيم ا و المنصف للزاوية الخارجية ح ا هـ يعين على امتداد القاعدة جزئين ب و ، ح و متناسبين للضلعين اب ، اح أيضاً

(برهان الامر الاول) ان يرسم من النقطة ح مستقيم ح هـ يوازي ا د ويمد الى ان يقابل امتداد ب ا فالمثلث ب ح هـ يكون فيه الخط ا د موازياً للقاعدة وبذا (قضية ١٦) يحدث $\frac{\text{ب د}}{\text{د ح}} = \frac{\text{اب}}{\text{اهـ}}$

لكن المثلث ا ح هـ متساوي الساقين لان من توازي ا د ، ح هـ تكون الزاوية

اح ه = ءاح والزاوية اه ح = ب اء وحيث ان ءاح = ب اء بالفرض فتكون الزاوية اح ه = اه ح واذن يكون اه = اح وعلى ذلك اذا وضع اح عوضاً عن اه فى التناسب المتقدم يحدث

$$\frac{ب ء}{ء ح} = \frac{اب}{اح}$$

(برهان الامر الثانى) ان يمد مستقيم ح ع يوازى او نحو المثلث ب او يحدث

$$\frac{ب و}{و ح} = \frac{اب}{اع}$$

وبمثل ما تقدم يتبين ان المثلث اع ح متساوى الساقين وان اع = اح فعلى ذلك يكون $\frac{ب و}{و ح} = \frac{اب}{اح}$

(نتيجه) اذا تحركت النقطة ا فى المستوى بحيث أن نسبة اب الى اح تبقى دائماً مساوية $\frac{م}{ه}$ فان منصفى الزاويتين ب اح , ه اح يمران دائماً بالنقطتين ء , و لانه يجب ان يكون كل من النسبتين $\frac{ب ء}{ء ح}$, $\frac{ب و}{و ح}$ باقياً على كونه مساوياً $\frac{م}{ه}$ ومع ذلك فان المستقيمين اء , او المنصفين للزاويتين المتجاورتين متعامدان فعلى ذلك تكون النقطة ا فى جميع أوضاعها موجودة على محيط الدائرة المرسوم بجعل وء قطراً ومن ذا ينتج ان المحل الهندسى للنقط التى بعدا كل منها عن نقطتين مثل ب , ح يكونان على نسبة معلومة هو محيط دائرة

تعريف

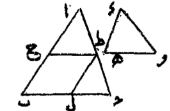
المثلثان المتشابهان هما مثلثان زواياهما متساوية واضلاعهما المتناظرة متناسبة

او الاضلاع المتناظرة هي المقابلة للزوايا المتساوية)
وعلى العموم المضلعات المتشابهان هما ما كانت زواياهما متساوية كل لنظيره واضلاعهما المتناظرة متناسبة (والاضلاع المتناظرة هي المجاورة للزوايا المتساوية)

القضية التاسعة عشر

نظريه

المثلثات المتساويا الزوايا تكون اضلاعهما المتناظرة متناسبة



ليكن ا ب حـ , ء ه و مثلثين زواياهما متساوية كل لنظيره أي ا = ء , ب = ه , حـ = و فالاضلاع المتناظرة تكون متناسبة بمعنى انه يحدث

$$\frac{اب}{ءه} = \frac{احـ}{ءو} = \frac{بحـ}{هو}$$

برهان ذلك ان يؤخذ اع = ءه , اط = ءو ويوصل ع ط فالمثلثان اع ط , ء ه و يكونان متساويين لان فيهما زاويتين متساويتين محصورتين بين اضلاع متساوية فعلى ذلك تكون الزاوية اع ط مساوية للزاوية ه وحيث كانت ه = ب فتكون الزاوية ب = اع ط وان يكون ع ط موازيًا ب حـ ويحدث (قضية ١٦) هذا التناسب

$$\frac{اب}{اع} = \frac{احـ}{اط}$$

واذا مدّ ط ل موازيًا اب يحدث أيضًا (قضية ١٦) هذا التناسب

$$\frac{احـ}{اط} = \frac{بحـ}{بل} \quad \text{أو} \quad \frac{احـ}{اط} = \frac{بحـ}{ع ط}$$

لان المستقيمين س ل , ح ط متساويان لكونهما متوازيين محصورين بين خطين متوازيين فاذا صار مقارنة التناسب الاخير بالتناسب المتقدم مع الالتفات للنسبة المشتركة يحدث

$$\frac{اب}{اح} = \frac{اح}{اط} = \frac{بح}{حءط}$$

أي

$$\frac{اب}{ءه} = \frac{اح}{ءو} = \frac{بح}{هو}$$

(نتيجه) يكفي في تشابه المثلثين ان يكون في كل منهما زاويتان مساويتان لنظيرتيهما من الاخر لان الزاوية الثالثة من كل منهما تكون حينئذ مساوية لنظيرتها من الاخر وبذا يكون المثلثان متساويي الزوايا

القضية العشرون

نظريه

المثلثان اللذان اضلاعهما متناسبة تكون زواياهما متساوية

أي اذا فرض ان $\frac{بح}{هو} = \frac{اب}{ءه} = \frac{اح}{ءو}$ فان زوايا المثلثين ابح , ءهو تكون متساوية بمعنى ان ا = ء , ب = ه , ح = و

برهان ذلك ان يؤخذ اح = ءه , اط = ءو وان يوصل ح ط ثم فرض القضية يحدث

$$\frac{اب}{ءه} = \frac{اح}{ءو}$$

وهو عبارة عن

$$\frac{اب}{اح} = \frac{اح}{اط}$$

ومن ذا ينتج ان ع ط يوازى ب ح وبناءً على ذلك تكون الزاوية اع ط = ا ب ح
وحيث انه بمقتضى النظرية المتقدمة تكون زوايا المثلثين ا ب ح , ا ع ط متساوية
حينئذٍ فيحدث $\frac{اب}{اع} = \frac{اح}{اط} = \frac{بح}{عط}$
لكن بالفرض $\frac{اب}{ده} = \frac{اح}{دو} = \frac{بح}{هو}$
وحيث ان اع = د ه , اط = د و يكون ع ط = ه و وبذا يكون المثلثان
اع ط , د ه و متساويين لتساوى اضلاعهما المتناظرة وبذا تكون الزاوية
د ه و = اع ط = ا ب ح والزاوية د و ه = اط ع = ا ح ب والزاوية د = ا
(تنبيه ١) يلزم التنبيه لان الزوايا المتساوية فى المثلثين مقابلة للاضلاع المتناسبة
(تنبيه ٢) يشاهد من هاتين القضيتين الاخيرتين ان تساوى الزوايا فى المثلثين
تابع لتناسب الاضلاع والعكس بالعكس بحيث ان احد هذين الشرطين يكفى
فى التحقق من تشابه المثلثين وليس الامر كذلك فى الاشكال التى اضلاعها اكثر من
ثلاثة لانه بمجرد اعتبار الاشكال الرباعية يمكن بدون تغير الزوايا اختلال تناسب
الاضلاع ويمكن بدون خلل فى الاضلاع تغير الزوايا فعلى ذلك تناسب الاضلاع
لا يتأتى من تساوى الزوايا ولا تساوى الزوايا يتأتى من تناسب الاضلاع
فمن الواضح مثلاً انه اذا مد ه و موازياً ب ح
كانت زوايا الرباعى ا ه و د مساوية لزوايا الرباعى
ا ب ح د لكن تناسب الاضلاع مختلف ومن الواضح
أيضاً انه بدون تغير الاربعة اضلاع ا ب , ب ح , ح د , د ا يمكن قرب أو بعد النقطة

ب من النقطة ء وكل من هذين الاخرين يتأتى منه تغير الزوايا

(تنبيه ٣) قضية مربع الوتر والقضيتان المتقدمتان الثانى لا يتكون منهما فى الحقيقة الا قضية ولعلها هى القضايا الاكثر من غيرها استعمالاً واهمية فى الهندسة وهى تكفى دون غيرها تقريباً فى جميع التطبيقات وفى حل جميع المسائل وسبب ذلك انه يمكن تقسيم جميع الاشكال الى مثلثات وان أي مثلث يمكن تقسيمه الى مثلثين قائمى الزاوية فمن اجل ذلك كانت الخواص العمومية للمثلثات مشتملة اشتمالاً ضمنياً على خواص جميع الاشكال

القضية الحادية والعشرون

نظرية

المثلثان اللذان فيهما زاويتان متساويتان محصورتان بين اضلاع متناسبة يكونان متشابهين.

اى اذا كانت الزاوية ا = ء وفرض أن

$$\frac{اب}{ءه} = \frac{اح}{ءو}$$

فان المثلث اب ح يكون مشابهاً للمثلث ءهو

برهان ذلك انه يؤخذ اع = ءه وان يمد ع ط موازياً ب ح فالزاوية اع ط تكون (قضية ٥، مقالة ١) مساوية للزاوية اب ح وزوايا المثلث اع ط تكون مساوية لزوايا المثلث اب ح واذن يحدث

$$\frac{اب}{اع} = \frac{اح}{اط}$$

لكن بالفرض $\frac{اب}{ده} = \frac{اح}{دو}$

وبالعمل اح = ده فحينئذٍ اط = دو ويكون في المثلثين اح ط , ده و

زاويتان متساويتان محصورتان بين اضلاع متساوية وبذا يكونان متساويين

وحيث ان المثلث اح ط مشابه للمثلث ا ب ح يكون ده و مشابها للمثلث

ا ب ح أيضاً

القضيـــة الثانية والعشرون

نظرية

المثلثان اللذان اضلاعهما المتناظرة متوازية أو متعامدة يكونان متشابهين

لانه اذا كانت ا , ب , ح زوايا احد المثلثين و اَ , بَ , حَ زوايا المثلث

الاخر فمن المعلوم ان كل زاويتين توازت اضلاعهما أو تعامدت تكونان

متساويتين او مكملتين لبعضهما

فعلى ذلك لا يمكن ان يفرض الا احد الفروض الثلاثة الآتية وهي

الاول ا + اَ = ٢ ق , ب + بَ = ٢ ق , ح + حَ = ٢ ق

الثاني ا + اَ = ٢ ق , ب + بَ = ٢ ق , ح = حَ

الثالث ا = اَ , ب = بَ وبناءً عليه ح = حَ

وحيث ان مجموع زوايا المثلثين يكون في الفرض الاول مساوياً ست قوائم

وان هذا المجموع يكون في الفرض الثاني أكبر من اربع قوائم كان الفرض الثالث

مقبولا دون غيره فحينئذٍ يكون المثلثان متساويي الزوايا وبذا يكونان متشابهين

(تنبيه) الاضلاع المناظرة فى المثلثين هى الاضلاع المتوازية أو المتعامدة

القضية الثالثة والعشرون

نظرية

اذا فرض اى مضلع امكن دائماً ان يرسم مضلع ثان بحيث يكون هذان المضلعان مركبين من مثلثات متشابهة متحدة العدد ومتشابه الوضع

ليكن ا ب ح ء ه المضلع المعلوم فللبرهنة على ماذكر يمد من الرأس ا القطران ا ح , ا ء ثم من بعد ان تؤخذ نقطة بالاختيار مثل بَ على الضلع ا ب يمد بَ حَ يوازى ب ح , حَ ءَ يوازى ح ء ثم ءَ هَ يوازى ء ه فالمثلثات ا بَ حَ , ا حَ ءَ , ...الخ تكون متشابهة على التناظر للمثلثات ا ب ح , ا ح ء , ...الخ والمضلعان ا ب ح ء ه , ا بَ حَ ءَ هَ الممكن مع ذلك وضعهما بكيفية حيثما اتفقت بالنسبة لبعضهما يصيران مركبين من عدد واحد من مثلثات متشابهة شكلاً ووضعاً

القضية الرابعة والعشرون

نظرية

المضلعان ا ب ح ء ه , اَ بَ حَ ءَ هَ المركبان (كما شوهد سابقاً) من عدد واحد من مثلثات متشابهة شكلاً ووضعاً تكون زواياهما متساوية كل لنظيره واضلاعهما المتناظرة تكون متناسبة وبذا يكونان متشابهين لانه من تشابه المثلثين ا ب ح , اَ بَ حَ تكون الزاوية ا ب ح = اَ بَ حَ

والزاوية ب ج ا = بَ جَ اَ ومن تشابه المثلثين ا ج د ، اَ جَ دَ تكون الزاوية
ا ج د = اَ جَ دَ

ومنه ينتج ان الزاوية ب ج د = بَ جَ دَ وهكذا وزيادة على ذلك فانه من تشابه المثلثات المذكورة يحدث التناسب الكثير الحدود الآتي وهو

$$\frac{اب}{اَبَ} = \frac{بج}{بَجَ} = \frac{اج}{اَجَ} = \frac{جد}{جَدَ} = \frac{اد}{اَدَ} = \frac{ده}{دَهَ} = \frac{اه}{اَهَ}$$

بمعنى ان الاضلاع المتناظرة في المضلعين متناسبة ايضا وحينئذ يكونان متشابهين

القضية الخامسة والعشرون

نظرية

(بعكس النظرية المتقدمة) المضلعان المتشابهان يمكن تحليلهما الى عدد واحد من المثلثات المتشابهة شكلا ووضعا

وللبرهنة على ذلك تؤخذ زاوية مثل ا من المضلع ا ب ج د ه ويمد منها القطران ا ج , ا د وفي المضلع الآخر و ح ط ى ك تؤخذ الزاوية و المناظرة للزاوية ا ويمد منها القطران و ط , و ى لكن حيث ان المضلعين متشابهان تكون الزاوية ا ب ج مساوية لنظيرتها و ح ط وزيادة على ذلك يكون الضلعان ا ب , ب ج متناسبين للضلعين و ح , ح ط بحيث يحدث

$$\frac{اب}{وح} = \frac{بج}{حط}$$

فحينئذ يكون في المثلثين ا ب ج , و ح ط زاويتان متساويتان محصورتان بين اضلاع

متناسبة وبذا يكونان متشابهين (قضية ١٨) وعلى هذا تكون الزاوية ب ﺣ ا مساوية ج ط و فاذا طرح هاتان الزاويتان من الزاويتين المتساويتين ب ﺣ ى , ج ط ے كان الباقيان ا ﺣ ى , و ط ے متساويين لكن حيث ان المثلثين ا ب ﺣ , و ج ط متشابهان فانه يحدث $\frac{\text{ا ﺣ}}{\text{و ط}} = \frac{\text{ب ﺣ}}{\text{ج ط}}$

ومع ذلك فانه من تشابه المضلعين يحدث $\frac{\text{ب ﺣ}}{\text{ج ط}} = \frac{\text{ﺣ ى}}{\text{ط ے}}$

فعلى ذلك يكون $\frac{\text{ا ﺣ}}{\text{و ط}} = \frac{\text{ﺣ ى}}{\text{ط ے}}$

وحيث تبين فيما سبق ان الزاوية ا ﺣ ى = و ط ے فيكون فى المثلثين ا ﺣ ى , و ط ے زاويتان متساويتان محصورتان بين اضلاع متناسبة وبذا يكونان متشابهين وحيث انه بالاستمرار على هذا المنوال يمكن اثبات تشابه المثلثات التالية مهما كان عدد اضلاع المضلعين المفروضين فينتج من ذلك ان المضلعين المتشابهين يتركبان من عدد واحد من المثلثات المتشابهة شكلاً ووضعاً

(تنبيه) التحليل المذكور يمكن اجراؤه بجملة أوجه وذلك بان تمد الاقطار من رأسين متناظرتين حيثما اتفقتا فمن هنا ينتج انه فى المضلعين المتشابهين تكون النسبة بين أى قطرين متناظرين ب ه , ط ک مثلاً كالنسبة بين اى ضلعين متناظرين لان هذين القطرين انما هما ضلعان متناظران من مثلثين متشابهين ب ى ه , ط ے ک داخلين فى تركيب المضلعين

القضية السادسة والعشرون
نظرية

المستقيمات او , اج , ... بخ الممتدة حيثما يراد من رأس أى مثلث تقسم

القاعدة ب د وموازيها ءه الى اجزاء متناسبة بحيث يحدث

$$\frac{ءى}{بو} = \frac{ىك}{وح} = \frac{كل}{حط} = \ldots\ldots$$

لانه من حيث ان ءى يوازى ب و تكون زوايا المثلث اءى مساوية لزوايا المثلث اب و ويحدث التناسب $\frac{ءى}{بو} = \frac{اى}{او}$

وايضاً من حيث ان ى ك يوازى وح يحدث $\frac{اى}{او} = \frac{ىك}{وح}$

فلداعى النسبة المشتركة يحدث $\frac{ءى}{بو} = \frac{ىك}{وح}$

وبمثل ذلك يوجد ان $\frac{ىك}{وح} = \frac{كل}{حط}$ وهكذا وبذا يكون الخط ءه منقسماً فى النقطة ى ,ك ,ل كانقسام القاعدة فى النقط و ,ح ,ط

(نتيجه) ينتج مما ذكر انه اذا كان ب د منقسماً الى اجزاء متساوية فى النقط و ,ح ,ط فان موازيه ءه يكون منقسماً الى اجزاء متساوية ايضاً فى النقط ى ,ك ,ل

القضية السابعة والعشرون
نظريه

فى اى مثلث قائم الزاوية اذا انزل العمود اء من الزاوية القائمة ا على الوتر د ب

فأولاً المثلثان الجزئيان اب ء ,اء د يكونان متشابهين وكل منهما يكون مشابهاً للمثلث الكلى اب د

وثانياً كل من الضلعين اب ,اد يكون وسطاً متناسباً بين الوتر ب د وماجاور

الضلع من القطعتين ب ى ، ى حـ

وثالثاً العمود ا ى يكون وسطاً متناسباً بين القطعتين ب ى ، ى حـ

(برهان ذلك) أولاً من حيث ان المثلثين ب ا ى ، ب ا حـ مشتركان في الزاوية ب وان الزاوية القائمة ب ى ا تساوي الزاوية القائمة ب ا حـ تكون الزاوية الثالثة ب ا ى من المثلث الاول مساوية للزاوية الثالثة حـ من المثلث الثاني وبذا يكون هذان المثلثان متساويي الزوايا ومتشابهين

وبمثل هذا يبرهن على ان المثلث ى ا حـ يشابه المثلث ب ا حـ وحينئذ تكون الثلاث مثلثات متساوية الزوايا ومتشابهة

ثانياً من حيث ان المثلث ب ا ى مشابه للمثلث ب ا حـ فان اضلاعهما المتناظرة تكون متناسبة وحيث ان الضلع ب ى في المثلث الاصغر مناظر للضلع ب ا من المثلث الاكبر لمقابلتهما الزاويتين المتساويتين ب ا ى ، ب حـ ا وان الوتر ب ا من المثلث الاصغر مناظر للوتر ب حـ من المثلث الاكبر فانه يمكن تشكيل هذا التناسب

$$\frac{ب ى}{ا ب} = \frac{ا ب}{ب حـ}$$

وبمثل هذا يحدث

$$\frac{ى حـ}{ا حـ} = \frac{ا حـ}{ب حـ}$$

وبذا يثبت الامر الثاني وهو ان كلاً من الضلعين ا ب ، ا حـ وسط متناسب بين الوتر والقطعة المجاورة للضلع

ثالثاً من تشابه المثلثين ا ب ى ، ا ى حـ يحدث بمقارنة الاضلاع المتناظرة

ببعضها هذا التناسب

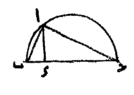
$$\frac{\text{ب د}}{\text{ا د}} = \frac{\text{ا د}}{\text{د ح}}$$

وبذا يثبت الامر الثالث وهو ان العمود ا د وسط متناسب بين قطعتي الوتر وهما ب د , د ح

(تنبيه) اذا وضع التساوي بين حاصل ضرب الطرفين وحاصل ضرب الوسطين في التناسب $\frac{\text{ب د}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ب ح}}$ يحدث $\overline{\text{ا ب}}^2 = \text{ب د} \times \text{ب ح}$ وبمثل ذلك يحدث $\overline{\text{ا ح}}^2 = \text{د ح} \times \text{ب ح}$ واذن يكون $\overline{\text{ا ب}}^2 + \overline{\text{ا ح}}^2 = \text{ب د} \times \text{ب ح} + \text{د ح} \times \text{ب ح}$

وحيث ان الطرف الثاني عبارة عن $(\text{ب د} + \text{د ح}) \times \text{ب ح}$ وان هذا يؤل الى $\text{ب ح} \times \text{ب ح}$ أي $\overline{\text{ب ح}}^2$ فيكون $\overline{\text{ا ب}}^2 + \overline{\text{ا ح}}^2 = \overline{\text{ب ح}}^2$ وحينئذٍ (بالارتكان على مساحة المربع) يكون المربع المنشأ على الوتر ب ح يساوي مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الاخرين ا ب , ا ح وبذا صار الوقوع في قضية مربع الوتر بطريقة مخالفة جداً للطريقة التي سبق اتباعها ومن ذا يشاهد ان قضية مربع الوتر تتأتى في الحقيقة من تناسب الاضلاع في المثلثات المتساوية الزوايا

(نتيجه) اذا اخذت نقطة مثل ا من محيط دائرة ووصل بينها وبين نهايتي القطر ب ح بالوترين ا ب , ا ح فان المثلث ب ا ح يكون قائم الزاوية في ا (قضية ١٩ مقاله ٢) ومن ذا ينتج أولاً ان العمود ا د وسط متناسب



بين قطعتي القطر وهما ب د , د ح أي ان المربع $\overline{\text{ا د}}^2$ يساوي المستطيل $\text{ب د} \times \text{د ح}$ وثانياً ان الوتر ا ب وسط متناسب بين القطر ب ح والقطعة ب د أي ان

$\overline{اب}^2 = ب ء \times ب ح$ وبمثل هذا يحدث $\overline{اح}^2 = ح ء \times ب ح$ فعلى ذلك يكون

$$\frac{\overline{اب}^2}{\overline{اح}^2} = \frac{ب ء}{ء ح}$$

واذا صار مقارنة $\overline{اب}^2$, $\overline{بح}^2$ ببعضهما يحدث

$$\frac{\overline{اب}^2}{\overline{بح}^2} = \frac{ب ء}{ب ح}$$

ويحدث أيضاً

$$\frac{\overline{اح}^2}{\overline{بح}^2} = \frac{ء ح}{ب ح}$$

هذه النسب الكائنة بين مربعات الاضلاع سوأ كانت بين مربعى الضلعين فقط أو بين مربع احدهما ومربع الوتر قد سبق ايجادها فى نتيجتى ٣ , ٤ من القضية الحادية عشر

القضية الثامنة والعشرون

نظرية

المثلثان اللذان فيهما زاويتان متساويتان تكون النسبة بينهما كالنسبة بين مستطيلى الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين

فنسبة المثلث ا ب ح الى المثلث ا ء هـ مثلاً كنسبة المستطيل ا ب × ا ح الى المستطيل ا ء × ا هـ

وللبرهنة على ذلك يوصل المستقيم ب هـ فالمثلثات ا ب هـ , ا ء هـ يكونان مشتركين فى الرأس هـ ومتساويين فى الارتفاع وبذا تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما ا ب , ا ء أى $\frac{ا ب هـ}{ا ء هـ} = \frac{ا ب}{ا ء}$

وبمثل ذلك يحدث $\frac{ا ب ح}{ا ب هـ} = \frac{ا ح}{ا هـ}$

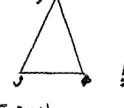
فاذا ضرب هذان التناسبان فى بعضهما على الترتيب وحذف الحد المشترك اب ه يحدث

$$\frac{\text{اب ح}}{\text{اى ه}} = \frac{\text{اب}\times\text{اح}}{\text{اى}\times\text{اه}}$$

القضية التاسعة والعشرون

نظرية

النسبة بين أى مثلثين متشابهين كالنسبة بين مربعى أى ضلعين متناظرين من اضلاعهما





لتكن الزاوية ا = ى والزاوية ب = ه

فلأجل تساوى الزاويتين ا ، ى

يحدث بمقتضى القضية المتقدمة هذا التناسب

$$\frac{\text{اب ح}}{\text{ى ه و}} = \frac{\text{اب}\times\text{اح}}{\text{ى ه}\times\text{ى و}}$$

وهو تناسب يمكن كتابته هكذا

$$\frac{\text{اب ح}}{\text{ى ه و}} = \frac{\text{اب}}{\text{ى ه}} \times \frac{\text{اح}}{\text{ى و}}$$

وحيث انه من تشابه المثلثين المفروضين يحدث

$$\frac{\text{اب}}{\text{ى ه}} = \frac{\text{اح}}{\text{ى و}}$$

فيكون

$$\frac{\text{اب ح}}{\text{ى ه و}} = \frac{\text{اب}}{\text{ى ه}} \times \frac{\text{اب}}{\text{ى ه}} = \frac{\overline{\text{اب}}^{2}}{\overline{\text{ى ه}}^{2}}$$

القضية الثلاثون

نظرية

النسبة بين محيطى أى مضلعين متشابهين كالنسبة بين أى ضلعين متناظرين من

اضلاعهما والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعى هذين الضلعين

لانه أولاً من تشابه الضلعين يحدث

$$\frac{اب}{وع} = \frac{بح}{عط} = \frac{حد}{طى} = \cdots\cdots$$

ومن هذا يحدث

$$\frac{اب}{وع} = \frac{اب + بح + حد + \cdots\cdots}{وع + عط + طى + \cdots\cdots}$$

وبذا يثبت الجزء الأول من النظريه

ثانياً من حيث ان المثلثين ابح , وعط متشابهات فانه (قضيه ٩٩)

يحدث

$$\frac{ابح}{وعط} = \frac{\overline{اح}^2}{\overline{وط}^2}$$

وأيضاً من تشابه المثلثين احد , وطى يحدث

$$\frac{احد}{وطى} = \frac{\overline{اح}^2}{\overline{وط}^2}$$

فلداعى النسبة المشتركه يحدث

$$\frac{ابح}{وعط} = \frac{احد}{وطى}$$

وبمثل هذا الدليل يوجد ان

$$\frac{احد}{وطى} = \frac{ادهـ}{وىك}$$

ويستمر على هذا المنوال اذا وجدت مثلثات زيادة عما ذكر واذن ينتج من هذه التناسبات ان

$$\frac{ابح + احد + ادهـ}{وعط + وطى + وىك} = \frac{ابح}{وعط} = \frac{\overline{اح}^2}{\overline{وط}^2} \quad أو = \frac{\overline{اب}^2}{\overline{وع}^2}$$

وعلى ذلك تكون النسبة بين المضلعين المتشابهين كالنسبة بين مربعى

ضلعين متناظرين من اضلاعهما

القضية الحادية والثلاثون

نظرية

الوتران اب ، حد المتقاطعان فى دائرة تكون اجزاؤهما متناسبة تناسبا عكسيا اى انه يحدث

$$\frac{او}{دو} = \frac{حو}{وب}$$

وللبرهنة على ذلك يوصل المستقيمان اح ، ب د فالمثلثان احو ، ب و د يكونان متشابهين لان زاويتيهما اللتين رأساهما و متساويتان لتقابلهما بالرأس والزاوية ا = د لانهما مرسومتان فى قطعة واحدة (قضية ١٩ مقاله ٣) والزاوية ح = ب بالدليل عينه فمن تشابه المثلثين المذكورين يحدث $\frac{او}{دو} = \frac{حو}{وب}$ وهو المقتضى اثباته

(نتيجه) من هذا التناسب يستخرج او × وب = دو × حو ومن هذا يعلم ان مستطيل جزئى احد الوترين يساوى مستطيل جزئى الوتر الآخر

القضية الثانية والثلاثون

نظرية

اذا فرضت نقطة مثل و خارج دائرة ومد منها القاطعين وب ، وح المنتهيان بالقوس المقعر ب ح فان القاطعان الكاملين يكونان متناسبين تناسبا

عكسياً لجزئيهما الخارجين اى انه يحدث $\frac{وب}{وح} = \frac{وء}{وا}$

لانه اذا وصل اح ، ب ء يكون المثلثان وا ح ، و ب ء مشتركين فى الزاوية و وزيادة على ذلك فان الزاوية ب = ح (قضية ١٩ مقالة ٣)

وبذا يكون هذان المثلثان متشابهين ومن تشابههما يحدث التناسب الآتى وهو

$$\frac{وب}{وح} = \frac{وء}{وا}$$

(نتيجه) من هذا التناسب ينتج ان المستطيل وا × وب يساوى المستطيل وح × وء

(تنبيه) هذه القضية تضاهى القضية المتقدمة ولا تختلف عنها الا فى كون الوترين اب ، ح ء متقاطعين خارج الدائرة

القضية الثالثة والثلاثون

نظريه

اذا فرضت نقطة مثل و خارج دائرة ومد منها مماس مثل وا وقاطع مثل وح فان المماس يكون وسطاً متناسباً بين القاطع وجزئه الخارج بحيث يحدث هذا التناسب $\frac{وح}{وا} = \frac{وا}{وء}$ الذى هو كناية عن $\overline{وا}^2 = وح \times وء$

لانه اذا وصل اء ، اح كان المثلثان واء ، واح مشتركين فى الزاوية و وزيادة على ذلك فان الزاوية واء المشكلة من مماس ووتر

تماس (قضية ٣٠ مقاله ٢) بنصف القوس ا د والزاوية حـ تماس بنصف القوس عينه فعلى ذلك تكون الزاوية و ا د = حـ وحينئذٍ يكون المثلثان المذكوران متشابهين ومن تشابههما يحدث هذا التناسب

و حـ / ا و = و ا / و د

وهو تناسب يحدث منه و ا² = و حـ × و د

(تنبيه) هذه القضية يمكن استنتاجها من القضية المتقدمة باعتبار المماس و ا نهاية الاضلاع التي يأخذها قاطع دائر حول النقطة و

القضية الرابعة والثلاثون

نظريه

في كل مثلث مثل ا ب حـ مستطيل الضلعين ا ب، ا حـ يساوي المستطيل المتكون من القطر حـ هـ المخصوص بالدائرة المرسومة على المثلث ومن العمود ا د المنزل على الضلع الثالث ب حـ

لانه اذا وصل ا هـ كان المثلثان ا ب د، ا هـ حـ قائمي الزاوية احدهما في د والاخر في ا وزيادة على ذلك فان الزاوية ب = هـ وبذا يكون المثلثان المذكوران متشابهين ويحدث منهما هذا التناسب ا ب / حـ هـ = ا د / ا حـ

ومنه ينتج ان ا ب × ا حـ = حـ هـ × ا د

(نتيجه) اذا ضرب طرفا هذه المتساوية في ب حـ يحدث ا ب × ا حـ × ب حـ = حـ هـ × ا د × ب حـ

وحيث ا ء × ب ح كناية عن ضعف مساحة المثلث (قضية ٦) ينتج من ذلك ان حاصل ضرب الاضلاع الثلاثة من اى مثلث يساوى حاصل ضرب سطح هذا المثلث فى ضعف قطر الدائرة المرسومة عليه

حاصل ضرب ثلاثة خطوط يسمى فى بعض الاحيان جسماً وذلك لدليل يعلم فيما سيأتى ومقداره يتصور بالسهولة عند مايتوهم تحويل الخطوط الى اعداد وضرب هذه الاعداد فى بعضها

(تنبيه) يمكن الاثبات أيضاً على ان سطح أى مثلث يساوى حاصل ضرب محيطه فى نصف نصف قطر الدائرة المرسومة فيه

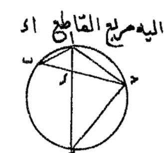
لان نصف قطر الدائرة المرسومة فى المثلث المفروض ا ب ح يكون ارتفاعاً مشتركا بين المثلثات ام ب, ب م ح, ا م ح المشتركة الرأس فى م فعلى ذلك يكون مجموع هذه المثلثات مساوياً لحاصل ضرب مجموع القواعد ا ب, ب ح, ا ح فى نصف النصف قطر م ء وبهذا يكون سطح المثلث ا ب ح مساوياً لحاصل ضرب محيطه فى نصف نصف قطر الدائرة المرسومة فيه

القضية الخامسة والثلاثون

نظريه

اى مثلث مثل ا ب ح اذا قسمت زاويته ا الى قسمين متساويين بالمستقيم ا ء كان مستطيل الضلعين ا ب, ا ح مساوياً لمستطيل القطعتين ب ء, ء ح مضافاً

اليه مربع القاطع اء



وللبرهنة على ذلك يرسم محيط دائرة يمر بالنقط الثلاث ا ، ب ، ح ويمد اء حتى يقابل محيط الدائرة ثم يوصل حه

فالمثلث ب اء يكون مشابهاً للمثلث ه اح لان الزاوية ب اء = ه اح بالفرض وزيادة على ذلك فان الزاوية ب = ه لان كلاهما تقاس بنصف القوس اح فحينئذٍ يكون المثلثان المذكوران متشابهين ويحدث بين اضلاعهما المتناظرة هذا التناسب $\frac{ب ا}{ا ه} = \frac{ا ء}{ا ح}$

ومنه ينتج ان ب ا × اح = اه × اء

لكن اه = اء + ءه فاذا ضرب الطرفان فى اء يحدث اه × اء = $\overline{اء}^2$ + اء × ءه

ومع ذلك فان اء × ءه = ب ء × ءح فاذن يكون

ب ا × اح = $\overline{اء}^2$ + ب ء × ءح

القضية السادسة والثلاثون
نظرية

فى أى شكل رباعى مرسوم فى الدائرة مثل ا ب ح ء مستطيل القطرين اح ، ب ء يساوى مجموع مستطيلى الاضلاع المتقابلة أى انه يحدث

اح × ب ء = اب × حء + اء × ب ح

وللبرهنة على ذلك يرسم المستقيم ب ه بحيث تكون الزاوية ج ب ه = ا ب د ويمد هذا المستقيم حتى يتقابل مع ا ج فالزاوية ا د ب تكون مساوية للزاوية ب ج ه لانهما مرسومتان في قطعة واحدة ا ب وزيادة على ذلك فان الزاوية ا ب د = ج ب ه بالعمل فعلى ذلك يكون المثلث ا ب د مشابهاً للمثلث ه ب ج ويحدث هذا التناسب

ا د / ج ه = ب د / ب ج ومنه يحدث ا د × ب ج = ج ه × ب د (١)

لكن المثلث ا ب ه مشابه للمثلث ب د ج لانه من حيث ان الزاويتين ا ب د و ج ب ه متساويتان فاذا اضيف على كل منهما د ب ه يحدث ا ب ه = د ب ج وزيادة على ذلك فان الزاوية ب ا ج = ب د ج لانهما مرسومتان في قطعة واحدة فبذا يكون المثلثان ا ب ه و د ب ج متشابهين ويحدث بين اضلاعهما المتناظرة هذا التناسب

ا ب / ب د = ا ه / د ج ومنه يحدث ا ب × ج د = ا ه × ب د (٢)

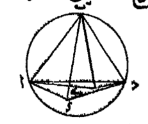
فاذا جمعت المتساويتان (١) و (٢) على بعضهما مع ملاحظة كون ا ه × ب د + ج ه × ب د = (ا ه + ج ه) × ب د = ا ج × ب د يحدث

ا د × ب ج + ا ب × ج د = ا ج × ب د

القضية السابعة والثلاثون

نظرية

الشكل الرباعي الذي لا يقبل رسم دائرة عليه يكون مستطيل قطريه اقل من مجموع مستطيلي اضلاعه المتقابلة



وللبرهنة على ذلك يرسم محيط دائرة يمر بالثلاث نقط ا ، ب ، حـ وهو محيط لا يمر بالرأس الرابعة ء ثم يرسم الزاوية ا ب هـ = ء ب حـ والزاوية ب ا هـ = ب ء حـ

فالمستقيم ا هـ لا يتحد مع ا حـ لانه من كون النقطة ء ليست على المحيط تكون الزاوية ب ء حـ غير مساوية للزاوية ب ا حـ وبعد ذلك يوصل مستقيم بين النقطتين هـ ، حـ فالمثلثات ا ب هـ ، ب ء حـ المتساويا الزوايا بالعمل يحدث منها هذا التناسب

$\frac{\text{اب}}{\text{اهـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ء حـ}}$ ومنه يحدث ا هـ × ب ء = ا ب × ء حـ (١)

لكن المثلثان ا ب ء ، هـ ب حـ متشابهان أيضاً لانه اذا طرح من الزاويتين المتساويتين ا ب هـ ، ء ب حـ جزؤهما المشترك ء ب هـ تكون الزاوية ا ب ء = هـ ب حـ وزيادة على ذلك فانه من تشابه المثلثين ا ب هـ ، ء ب حـ يحدث هذا التناسب $\frac{\text{اب}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب حـ}}$

وحينئذ يكون في المثلثين ا ب ء ، هـ ب حـ زاويتان متساويتان محصورتان بين اضلاع متناسبة فيذا يكونان متشابهين ويحدث هذا التناسب

$\frac{\text{ا ء}}{\text{هـ حـ}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{ب حـ}}$ ومنه يحدث هـ حـ × ب ء = ا ء × ب حـ (٢)

فاذا جمعت المتساويتان (١) ، (٢) يحدث

ب ء (ا هـ + هـ حـ) = ا ب × ء حـ + ا ء × ب حـ

وحيث ان ا هـ + هـ حـ اكبر من ا حـ يكون

ب د × ا ح < (ا ب × د ح + ا د × ب ح)

(تنبيه) ينتج مما ذكر انه اذا كان مستطيل قطرى أى شكل رباعى مساويا لمجموع مستطيلى اضلاعه المتقابلة فان هذا الشكل يمكن رسمه فى الدائرة

القضية الثامنة والثلاثون

نظريه

النسبة بين قطرى أى شكل رباعى مرسوم فى الدائرة كنسبة حاصل جمع مستطيلات الاضلاع الواصلة لنهاياتها

وذلك لان الرباعى ا ب ح د مستقيم بالقطر ا ح الى المثلثين ا ب ح , ا د ح فاذا جعل نق رمزا لنصف قطر الدائرة المرسومة فى الخارج فانه (قضية ٣٤) يحدث

ا ب × ب ح × ا ح = ٤ نق × ا ب ح

و

ا د × د ح × ا ح = ٤ نق × ا د ح

وبالجمع يحدث ا ح × (ا ب × ب ح + ا د × د ح) = ٤ نق × ٢ ا ب ح د

ومن كون الرباعى منقسما الى مثلثين بالقطر ب د يحدث أيضا

ب د (ا ب × ا د + ب ح × د ح) = ٤ نق × ا ب ح د

فعلى ذلك يحدث

ا ح (ا ب × ب ح + ا د × د ح) = ب د × (ا ب × ا د + ب ح × ح د)

ومن ذا يحدث هذا التناسب $\frac{\text{ا ح}}{\text{ب د}} = \frac{\text{ا ب} \times \text{ا د} + \text{ب ح} \times \text{ح د}}{\text{ا ب} \times \text{ب ح} + \text{ا د} \times \text{د ح}}$

فى المسائل المتعلقة بالمقالة الثالثة

المسئلة الأولى

المطلوب تقسيم خط مستقيم معلوم الى اجزاء متساوية عددها بقدر ما يراد أو الى اجزاء مناسبة لخطوط معلومة

لنفرض أولاً ان المطلوب تقسيم الخط ا ب الى خمسة اقسام متساوية

فلذلك يمد من النهاية ا مستقيم غير محدود مثل اد ومن بعد يجعل اح مساوياً لطول حيثما اتفق بنقل اح على اع خمس مرات ثم توصل نقطة التقسيم الاخيرة ع الى النهاية ب بالمستقيم ع ب ويمد ح ى موازياً ع ب فالمستقيم ا ى يكون خمس المستقيم ا ب وحينئذ اذا نقل ا ى خمس مرات على ا ب يصير الخط ا ب منقسماً الى خمسة اقسام متساوية

لانه من حيث ان ح ى موازٍ للمستقيم ع ب يكون الضلعان اع , ا ب مقطوعين على التناسب فى ح , ى (قضية ١٦) وحيث ان اح خمس اع فيكون ا ى خمس ا ب

ثانياً لنفرض ان المطلوب تقسيم المستقيم ا ب الى اجزاء مناسبة للمستقيمات المعلومة ع , ك , ر

فلذلك يمد من النهاية ا مستقيم غير محدود

مثل اد ويؤخذ اح = ع , حد = ك , ده = ر ثم يوصل مستقيم بين هـ ب ويمد من النقطتين ح , د مستقيمان حى , دل يوازيان هـ ب فبذا يصير المستقيم اب منقسماً الى اجزا اى , ى ل , ل ب مناسبة للخطوط المعلومة ع , ك , ر لانه من توازى المستقيمات حى , ل د , هـ ب تكون الاجزا اى , ى ل , ل ب مناسبة للاجزا اح , حد , ده (قضية ١٦) وحيث ان هذه الخطوط الاخيرة مساوية بالعمل للخطوط المعلومة ع , ك , ر فيكون العمل المذكور موافقاً للمطلوب

المسئلة الثانيه

المطلوب ايجاد الرابع المتناسب مع ثلاثة خطوط معلومة ا , ب , ح

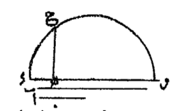
لذلك يمد مستقيمان غير محدودين مثل ده , دو يصنعان بينهما زاوية حيثما اتفقت ويؤخذ على ده طول دا = ا وطول دب = ب ثم يؤخذ على دو طول دح = ح ويوصل المستقيم اح وبعدها يمد من ب مستقيم ب س يوازى اح فالجزء د س يكون هو الرابع المتناسب المطلوب لانه من حيث ان ب س يوازى اح يحدث التناسب $\frac{دا}{دب} = \frac{دح}{دس}$ وحيث ان الثلاثة حدود الأول من هذا التناسب مساوية للثلاثة خطوط المعلومة فيكون د س هو الرابع المتناسب المطلوب

(نتيجه) يمكن بمثل ما ذكر ايجاد الثالث المتناسب مع الخطين المعلومين ا , ب لان هذا الثالث المتناسب انما هو الرابع المتناسب للثلاثة خطوط ا , ب , ح

المسئلة الثالثة

المطلوب إيجاد الوسط المتناسب بين خطين معلومين ا ، ب
لذلك ثلاث طرق

(الطريقة الاولى) يرسم مستقيم غير محدود مثل د و ويؤخذ عليه طول
د هـ = ا وطول هـ و = ب ثم يجعل الخط الكلي
د و قطراً ويرسم عليه النصف محيط دائرة
د ح و ويقام على هذا القطر من هـ العمود هـ ح الذي



يقابل المحيط في ح فهذا العمود يكون هو الوسط المتناسب المبحوث عنه
لان العمود ح هـ المنزل من نقطة من المحيط على القطر هو وسط متناسب
بين الجزئين د هـ ، هـ و المنقسم اليهما القطر (قضية ٢٧ نتيجه) وهذان
الجزآن مساويان للخطين المعلومين ا ، ب

(الطريقة الثانيه) يؤخذ د و = ا ، د هـ = ب
ويرسم نصف محيط دائرة بجعل د و قطراً ويقام
العمود هـ ح على د و ويوصل مستقيم بين ح ، د
فهذا المستقيم ح د يكون هو الوسط المتناسب بين ا ، ب

(الطريقة الثالثة) يؤخذ هـ د = ا ، هـ ك = ب ويرسم محيط دائرة
حسبما اتفق

يمر بالنقطتين ى , حـ ويمد من هـ المستقيم هـ ا مماس لهذا المحيط فالخط هـ ا يكون هو الوسط المتناسب بين ا , ب

المسئلة الرابعة

المعلوم زاوية مثل ب حـ ى ونقطة داخلها مثل ا والمطلوب رسم مستقيم ب ى يمر بهذه النقطة ويكون جزآه اب , اى المحصوران بين النقطة ا وضلعي الزاوية متساويين

لذلك يمد المستقيم اهـ الموازي حـ ى من النقطة ا ويجعل بهـ = حـهـ ويوصل المستقيم ب ا ى بين النقطتين ب , ا فيكون هو المستقيم المطلوب

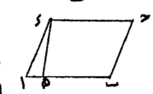
لانه من كون اهـ يوازي حـ ى يحدث $\frac{بهـ}{هـحـ} = \frac{با}{اى}$

وحيث ان بهـ = هـحـ يكون با = اى

المسئلة الخامسة

المطلوب انشاء مربع يكافئ متوازي اضلاع معلوماً ومثلثاً معلوماً

(أولاً) لتكن اب قاعدة متوازي الاضلاع المعلوم , ى هـ ارتفاعه , س ضلع المربع المبحوث عنه فيجب ان يحدث $س^2 = اب \times ىهـ$ أو $\frac{اب}{س} = \frac{س}{ىهـ}$



وعلى ذلك يكون س وسطاً متناسباً بين اب , ى هـ

احمد نجيب هندسة م ٣٢

ثانياً يشاهد كما تقدم ان ضلع المربع المكافئ لمثلث معلوم يكون وسطاً متناسباً بين قاعدة المثلث ونصف ارتفاعه

س

المسئلة السادسة

المفروض مستقيم مثل ا د والمطلوب رسم مستطيل ا د ه س على هذا المستقيم يكون مكافئاً لمستطيل معلوم اب و ح

ليكن ا س الارتفاع المجهول المخصوص بالمستطيل ا د ه س فمن لزوم تكافؤ المستطيلين تحدث المتساوية ا د × ا س = اب × اح

ومنها يحدث هذا التناسب $\frac{اد}{اب} = \frac{اح}{اس}$

ومنه يعلم ان الخط ا س المبحوث عنه هو رابع متناسب مع الثلاثة خطوط اد، اب، اح

المسئلة السابعة

المطلوب ايجاد مستقيمين تكون النسبة بينهما كالنسبة بين سطحي مستطيلين معلومين ليكن ا ب بعدى المستطيل الأول و ح، د بعدى المستطيل الثانى فمن حيث انه يمكن انتخاب احد الخطين المطلوبين على حسب الارادة فنجعله

مساويًا للخط ا وحينئذٍ اذا جعل س رمزًا للخط الثانى المطلوب فانه على مقتضى منطوق المسئلة يجب ان يحدث $\frac{ا \times ب}{ح \times ء} = \frac{ا}{س}$

ومن هذا يحدث $س = \frac{ح \times ء \times ا}{ا \times ب} = \frac{ح \times ء}{ب}$

ومن ذا يرى ان الخط س المبحوث عنه رابع متناسب مع الثلاثة خطوط ب , ح , ء

المسئلة الثامنة

المطلوب رسم مثلث يكافئ مضلعًا معلومًا

ليكن ا ب ح ء ه المضلع المعلوم فيبتدأ بتوصيل القطر ح ه الذى ينعزل به المثلث ح ء ه ويرسم من النقطة ء مستقيم ء و يوازى ح ه ويمد حتى يقابل امتداد ا ه ثم يوصل المستقيم ح و فالمضلع ا ب ح ء ه يكون مكافئًا للمضلع ا ب ح و الاقل منه فى عدد الاضلاع بواحد لان المثلثين ح ء ه , ح و ه مشتركان فى القاعدة ح ه ومتحدان فى الارتفاع أيضًا لوجود رأسيهما ء , و على المستقيم ء و الموازى للقاعدة فبذا يكون هذان المثلثان متكافئين وحيث انه باضافة الشكل ا ب ح ه الى المثلث الأول يحدث المضلع ا ب ح ء ه وانه باضافة الشكل عينه الى المثلث الثانى يحدث المضلع ا ب ح و فيكون هذان المضلعان متكافئين وبمثل ما ذكر يمكن حذف الزاوية ب باستعراض المثلث ا ب ح بمكافئة

اجـ ـد وبذا يتحول المخمس ا ب ـد ء هـ الى المثلث ج ـد و المكافى له
وهذه الطريقة يمكن تطبيقها على اى مضلع آخر لانه بتنقيص عدد الاضلاع
بواحد فى كل دفعة يتوصل الى المثلث المكافى للشكل
(تنبيه) قد شوهد فيما تقدم (مسئلة ٥) ان كل مثلث يمكن تحويله الى
مربع يكافئه فعلى هذا يمكن دائماً ايجاد مربع يكافى اى مضلع مفروض
وهذا هو ما يسمى بتربيع الشكل المستقيم الاضلاع
ومسئلة تربيع الدائرة عبارة عن ايجاد مربع مكافى لدائرة قطرها معلوم

المسئلة التاسعة

المطلوب رسم مربع يساوى مجموع أو فرق مربعين معلومين
ليكن ا , ب ضلعى المربعين المعلومين
فأولاً اذا كان المطلوب ايجاد المربع المساوى لمجموع هذين المربعين بمد مستقيمان
غير محدودين مثل ء هـ , هـ و يكون بينهما زاوية قائمة ويؤخذ
هـ ء = ا , هـ ج = ب ويوصل ء ج
فهذا المستقيم يكون هو ضلع المربع المطلوب
لانه من كون المثلث ء هـ ج قائم الزاوية يكون المربع المنشأ على ء ج مساوياً
لمجموع المربعين المنشأين على هـ ء , هـ ج
ثانياً اذا كان المطلوب ايجاد المربع المساوى لفرق المربعين المفروضين نرسم أيضاً
الزاوية القائمة و هـ ط ويؤخذ ج هـ بقدر اصغر الضلعين ا , ب ثم

يجعل النقطة ح مركزاً ويرسم قوس دائرة بنصف قطر ح ط يساوي الضلع
الآخر فهذا القوس يقطع هـ ط في النقطة ط والمربع المنشأ على هـ ط يكون
مساوياً لفرق المربعين المنشأين على الخطين ا ، ب

لان المثلث ح هـ ط قائم الزاوية ووتره ح ط = ا وضلعه ح هـ = ب
فعلى ذلك يكون المربع المنشأ على هـ ط هو المربع المطلوب

(تنبيه) بما ذكر يمكن ايجاد مربع يساوي مجموع مربعات عددها بقدر ما يراد
لان العمل الذي يتحول به مربعات الى مربع واحد يتحول به ثلاثة الى اثنين
وهذان الاثنان يتحولان الى واحد وبذا يصير الثلاث مربعات محولة الى مربع
واحد ويكون الامر كما ذكر اذا وجب طرح بعض مربعات من مجموع مربعات اخرى

المسئلة العاشرة

المطلوب انشاء مربع تكون نسبته الى مربع معلوم مثل ا ب ح ء كنسبة الخط م الى الخط ن
لذلك يرسم خط غير محدود مثل هـ ح ويؤخذ
هـ و = م و ح = ن ثم يجعل هـ ح قطراً
ويرسم عليه نصف محيط دائرة ويقام عليه العمود
و ط من النقطة و ويمد من النقطة ط
الوتران ط ح ، ط هـ ثم يؤخذ ط ك على الوتر الاول بقدر الضلع ا ب
المخصوص بالمربع المعلوم ويمد من النقطة ك مستقيم ك ى يوازي هـ ح
فالمستقيم ط ى يكون هو ضلع المربع المطلوب لانه من كون المستقيمين

ك ى , ح ه متوازيين يحدث

$$\frac{\text{ط ى}}{\text{ط ك}} = \frac{\text{ط ه}}{\text{ط ح}}$$

واذن يكون

$$\frac{\overline{\text{ط ى}}^{2}}{\overline{\text{ط ك}}^{2}} \quad \frac{\overline{\text{ط ه}}^{2}}{\overline{\text{ط ح}}^{2}}$$

لكن المثلث ه ط ح القائم الزاوية يحدث منه أيضاً (قضية ١١) ماهو آت

$$\frac{\overline{\text{ط ه}}^{2}}{\overline{\text{ط ح}}^{2}} = \frac{\text{ه و}}{\text{و ح}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$

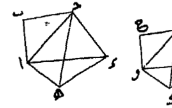
فاذن يكون

$$\frac{\overline{\text{ط ى}}^{2}}{\overline{\text{ط ك}}^{2}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$

.وحيث ان ط ك = اب تكون نسبة المربع المنشأ على ط ى الى المربع المنشأ على اب كنسبة م الى ن

المسئلة الحادية عشر

المطلوب رسم مضلع يشابه مضلعاً معلوماً اب ح د ه على الضلع و ع المناظر للضلع اب



لذلك يرسم القطرات اح , اد فى المضلع المعلوم ويرسم فى النقطة و زاوية ع و ط = ب اح وفى النقطة ع زاوية و ع ط = اب ح فالخطان و ط , ع ط يتقاطعان فى ط والمثلث و ع ط يكون مشابهاً للمثلث اب ح وبمثل هذا يرسم على و ط المناظر للضلع اح مثلث و ى ط يشابه اد ح وعلى و ى المناظر للضلع اد ينشأ المثلث و ى ك المشابه اد ه فالمضلع و ع ط ى ك يكون هو المضلع الذى يشابه اب ح د ه

لان هذين المضلعين مركبان من عدد واحد من المثلثات المتشابهة شكلاً ووضعاً

المسئلة الثانية عشر

المعلوم شكلان متشابهان والمطلوب رسم شكل يشابههما بشرط ان يكون مساوياً لمجموعهما أو لفرقهما

ليكن د , ك سطحي المضلعين المعلومين ا , ب ضلعين متناظرين من هذين المضلعين وليكن س سطح المضلع المبحوث عنه , ص الضلع المناظر للضلعين ا ب

فمن حيث ان نسبة اى مضلعين متشابهين كالنسبة بين مربعى أى ضلعين متناظرين من اضلاعهما يحدث

$$\frac{د}{ك} = \frac{ا^2}{ب^2}$$

ومن هذا يحدث $\frac{د}{د+ك} = \frac{ا^2}{ا^2+ب^2}$

ويحدث ايضاً $\frac{د}{س} = \frac{ا^2}{ص^2}$

وحيث ان $س = د + ك$ فيكون التناسبان الاخيران مشتركين في الثلاثة حدود الأول وبذا يكون $ص^2 = ا^2 + ب^2$

ومن ذا يشاهد ان ص هو وتر المثلث القائم الزاوية الذى ضلعا قائمته هما ا , ب

ومتى علم بذلك الضلع ص آلت المسئلة الى المثلث المتقدم

واذا لزم ان يكون $س = د - ك$ يحدث ايضاً التناسب

$$\frac{د}{ك} = \frac{ا^2}{ب^2}$$

ومنه يحدث $\frac{ق}{ك} = \frac{ا^2}{[illegible]}$

ويحدث ايضاً $\frac{ق}{س} = \frac{ا^2}{ص^2}$

ومنه يستنتج $ص^2 = ا^2$ [illegible]

المسئلة الثالثة عشر

المطلوب رسم شكل يشابه شكلاً معلوماً وتكون نسبته الى هذا الشكل كنسبة الكميتين م , ه

ليكن ق مسطح الشكل المعلوم , ا احد اضلاعه وليكن س سطح الشكل المطلوب , ص الضلع المناظر للضلع ا

فعلى مقتضى منطوق المسئله يحدث $\frac{س}{ق} = \frac{م}{ه}$

ومن تشابه المضلعين يحدث $\frac{س}{ق} = \frac{ص^2}{ا^2}$

ومن هذا يحدث $\frac{ص^2}{ا^2} = \frac{م}{ه}$

ومن ذا يشاهد انه يتحصل على الضلع ص بتطبيق المسئلة العاشره

المسئلة الرابعة عشر

المطلوب رسم شكل يشابه الشكل ق ويكافئ الشكل ك

ليكن ا ضلعاً من المضلع ق , ص الضلع المناظر له من الشكل س المبحوث عنه

فمن تشابه هذين المضلعين يحدث $\frac{ق}{س} = \frac{ا^2}{ص^2}$

وحيث من اللزوم مكافئة ص , ك يحدث $\frac{ق}{ك} = \frac{ا^2}{ص^2}$

واذا بحث عن مربعين $م^2$, $ه^2$ مكافئين للشكلين ق , ك يحدث

$$\frac{م^2}{هـ^2} = \frac{ا^2}{ص^2}$$

ومن هذا يحدث $\frac{م}{هـ} = \frac{ا}{ص}$

ومن ذا يرى ان ص رابع متناسب مع الثلاثة خطوط م , هـ , ا

المسئلة الخامسة عشر

المطلوب رسم مستطيل يكافئ مربعاً معلوماً حـ ويكون مجموع ضلعيه المتجاورين مساوياً لطول معلوم ا ب

لذلك يجعل ا ب قطراً ويرسم عليه نصف محيط دائرة ويمد المستقيم هـ ى موازياً للقطر بحيث يكون على بعد ا ى يساوى ضلع المربع المعلوم حـ ومن النقطة هـ التى يتقاطع فيها هذا الموازى مع محيط الدائرة ينزل العمود هـ و على القطر فالخطان ا و , و ب يكونان هما ضلعا المستطيل المبحوث عنه لان مجموعهما يساوى ا ب ومستطيلهما ا و × و ب يساوى مربع هـ و أو مربع ا ى وبذا يكون المستطيل المذكور مكافئاً للمربع المعلوم حـ

(تنبيه) لاجل ان تكون المسئلة ممكنة الحل يلزم ان لا يكون البعد ا ى اكبر من نصف القطر اى يلزم ان لا يكون ضلع المربع حـ اكبر من نصف الخط ا ب

المسئلة السادسة عشر

المطلوب رسم مستطيل يكافئ مربعاً معلوماً حـ ويكون فرق ضلعيه المتجاورين مساوياً لطول معلوم ا ب

لذلك يجعل الخط المعلوم ا ب قطراً ويرسم
عليه محيط دائرة ومن نهاية القطر يمد
المماس ا ى بطول يساوى ضلع المربع ح
ويوصل القاطع ى ه بين ى والمركز م فالمستقيمان ى ه , ى و يكونان
هما الضلعان المتجاوران من المستطيل المطلوب
وذلك لان فرق هذين الضلعين يساوى القطر ه و أو ا ب وان المستطيل
ى ه × ى و يساوى ا ى² فبذا يكون المستطيل مكافئاً للمربع المعلوم ح

المسئلة السابعة عشر

المطلوب تقسيم المستقيم ا ب الى نسبة ذات وسط وطرفين اى المطلوب
تقسيم المستقيم المذكور الى جزئين بحيث يكون اكبرها وسطاً متناسباً بين المستقيم
الكلى والجزء الأصغر

لذلك يقام العمود ب ح على ا ب من النهاية
ب ويؤخذ عليه طول يساوى نصف ا ب
ويجعل النقطة ح مركزاً ويرسم محيط دائرة
بنصف قطر يساوى ح ب ويوصل المستقيم ا ح الذى يقابل المحيط فى ى
ثم يؤخذ ا و = ا ى فالمستقيم ا ب يكون منقسماً فى النقطة و
على الوجه المذكور فى منطوق المسئلة

وذلك لانه اذا مدّ ا ح حتى يقابل المحيط مرة ثانيه فى ه فمن حيث

ان اب مماس يحدث هذا التناسب

$$\frac{\text{اه}}{\text{اب}} = \frac{\text{اب}}{\text{اد}}$$

أو $$\frac{\text{اه} - \text{اب}}{\text{اب}} = \frac{\text{اب} - \text{اد}}{\text{اد}}$$

وحيث ان اب = ده يكون اه − اب = اد = او ويكون

اب − اد = اب − او = وب

ومن ذلك يحدث هذا التناسب $\frac{\text{او}}{\text{اب}} = \frac{\text{وب}}{\text{او}}$

(تنبيه) ليكن اب = م فيحدث او = اد = اح − ح د

وحيث ان اح $= \sqrt{\text{اب}^2 + \text{بح}^2} = \sqrt{\text{م}^2 + \frac{\text{م}^2}{٤}}$

$$= \sqrt{\frac{٥\text{م}^2}{٤}} = \frac{\text{م}}{٢}\sqrt{٥}$$

وان ح د $= \frac{\text{م}}{٢}$

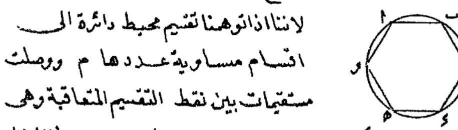
يكون او $= \frac{\text{م}}{٢}\sqrt{٥} - \frac{\text{م}}{٢} = \frac{\text{م}}{٢} \times (\sqrt{٥} - ١)$

المقالة الرابعه

فى المضلعات المنتظمة وفى مساحة الدائرة

تعريف

المضلع الذى اضلاعه متساوية وزواياه متساوية يسمى مضلعاً منتظماً وتوجد مضلعات منتظمة بأى عدد من الاضلاع



لاننا اذا توهمنا تقسيم محيط دائرة الى اقسام متساوية عددها م ووصلت مستقيمات بين نقط التقسيم المتعاقبة وهى

ا ب ، ب د ، .... نج تكون من ذلك مضلع عدد اضلاعه م وهذا المضلع تكون اضلاعه كلها متساوية لانها موترة لاقواس متساوية وزواياه وهى ا ، ب ، د ، .... نج تكون كلها متساوية لانها مرسومة فى اجزاء متساوية من محيط الدائرة

والمثلث المتساوى الاضلاع انما هو مضلع منتظم اضلاعه ثلاثة والمربع هو مضلع منتظم اضلاعه اربعه

القضية الأولى

نظريه

المضلعان المنتظمان المتساويان فى عدد الاضلاع يكونان متشابهين

لانه اذا كانت ا ب ح ء ه و , ع ط ى ك ل م مسدسين منتظمين

مثلاً كان مجموع زوايا المضلع الأول مساوياً لمجموع زوايا المضلع الثانى وكان كل من هذين المجموعين مساوياً لثمان زوايا قائمة

والزاوية ا تكون مساوية لسدس هذا المقدار وكذا الزاوية ع وبذا تكون الزاويتان ا , ع متساويتين ويكون الامر كذلك بالنسبة للزاويتين ب , ط وبالنسبة للزاويتين ح , ى وهكذا

وزيادة على ذلك من حيث انه من طبيعة المضلعين المذكورين تكون الاضلاع ا ب , ب ح , ح ء , ... الخ كلها متساوية وكذا الاضلاع ع ط , ط ى , ى ك , ... الخ فمن الواضح انه يحدث هذا التناسب :

اب/ع ط = ب ح/ط ى = ح ء/ى ك

فعلى ذلك تكون الزوايا المتناظرة فى المضلعين المذكورين متساوية وتكون اضلاعهما المتناظرة متناسبة وبذا يكونان متشابهين

(نتيجة) نسبة محيطى المضلعين المنتظمين المتساويين فى عدد الاضلاع كالنسبة بين اى ضلعين متناظرين من اضلاعهما والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعى هذين الضلعين

(تنبيه) زاوية المضلع المنتظم تتعين بعدد اضلاعه كزاوية المضلع المتساوى الزوايا

القضية الثانية

نظرية

كل مضلع منتظم يمكن رسمه فى دائرة ويمكن رسم دائرة فيه

ليكن ا ب حـ ء هـ و ح ط المضلع الجارى اعتباره ولنتوهم مرور محيط دائرة بالثلاث نقط ا ، ب ، حـ وليكن م مركز هذا المحيط ، م ع العمود النازل على منتصف الضلع ب حـ ولنصل ا م ، م ء

فالشكل الرباعى م ع حـ ء يمكن انطباقه على الشكل الرباعى م ع ب ا لانه من كون الضلع م ع مشترك بينهما والزاوية م ع حـ = م ع ب بالقيام ينطبق الضلع ع حـ على مساويه ع ب وتقع النقطة حـ فى ب وحيث ان الزاوية ع حـ ء = ع ب ا من طبيعة المضلع فان حـ ء يأخذ اتجاه ب ا وحيث ان حـ ء = ب ا تقع النقطة ء فى ا وبهذا يتحد الشكلان الرباعيان مع بعضهما بالكلية وعلى هذا يكون البعد م ء = م ا ومن ذا يشاهد ان محيط الدائرة المار بالثلاث نقط ا ، ب ، حـ يمر بالنقطة ء ايضاً وحيث انه يمكن البرهنة بالدليل عينه على ان محيط الدائرة الذى يمر بالرؤس الثلاثة ب ، حـ ، ء يمر بالرأس هـ التالية لها وهلم جرا فيعلم من ذلك ان محيط الدائرة عينه المار بالنقط ا ، ب ، حـ يمر بجميع رؤس المضلع وبذا يكون المضلع مرسوما فى محيط الدائرة المذكور

واما من خصوص الأمر الثانى فانه لما كانت جميع الاضلاع ا ب ، ب د ، د ى ، ..... لخ أوتارا متساوية كانت ابعادها عن المركز متساوية (قضية ٨ مقاله ٣) وعلى ذلك اذا جعلت النقطة م مركزا ورسم محيط دائرة بالنصف قطر م ع فهذا المحيط يمس المضلع ب د وبجميع الاضلاع الاخرى من المضلع ويكون التماس فى منتصف كل منها وبذا يصير محيط الدائرة مرسوما فى المضلع أو المضلع مرسوما على محيط الدائرة (تنبيه ١) النقطة م التى هى مركز مشترك بين الدائرة المرسومة فى الداخل والدائرة المرسومة فى الخارج يمكن اعتبارها مركزا للمضلع ايضا ولهذا الداعى تسمى الزاوية ا م ب المتكونة من النصفى قطرين الممتدين الى نهايتى ضلع واحد مثل ا ب بالزاوية المركزية

وحيث ان جميع الاوتار ا ب ، ب د ، ..... لخ متساوية فمن الواضح ان جميع الزوايا المركزية متساوية وانه يتحصل على مقدار كل منها بقسمة اربع زوايا قائمة على عدد اضلاع المضلع

(تنبيه ٢) رسم اى مضلع منتظم فى محيط دائرة معلوم لا يستدعى الا تقسيم هذا المحيط الى اقسام متساوية عددها بقدر عدد اضلاع المضلع

(تنبيه ٣) اذا رسم فى قوس ما جملة أوتارا متساوية فالشكل الحادث يسمى جزأ من مضلع منتظم أو خطا منكسرا منتظما وهو الأوفق وهذا الجزء تصدق عليه الخواص الاساسية للمضلعات المنتظمة اى ان زواياه تكون متساوية ويمكن رسمه فى دائرة ويمكن رسم دائرة عليه ومع ذلك فانه لا يكون جزءا حقيقيا

من مضلع منتظم أصلى الا اذا كان القوس الموتر باحد اضلاعه جزأ منذا خلاً فى محيط الدائرة المرسوم هو فيها

القضية الثالثة

مسئله

المطلوب رسم مربع فى محيط دائرة معلوم

لذلك يمد قطران مثل اح , ءب يكونان متقاطعين على زوايا قائمة ونوصل مستقيمات بين النهايات اب , بح , حء , ءا فالشكل ابحء يكون مربعاً مرسوماً فى الدائرة

لانه من كون الزوايا ام ب , بم ح , ... الخ متساوية تكون الاوتار اب , بح , ... الخ متساوية

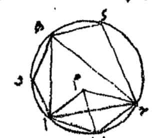
(تنبيه) من حيث ان المثلث بمح قائم الزاوية ومتساوى الساقين فانه على مقتضى (قضية ١١ مقاله ٣) يحدث هذا التناسب

$$\frac{\text{ب ح}}{\text{ب م}} = \sqrt{٢}$$

ومن ذا يعلم ان نسبة ضلع المربع المرسوم فى الدائرة الى نصف القطر كنسبة الجذر التربيعى للعدد ٢ الى الواحد

القضية الرابعة
مسئلة

المطلوب رسم مسدس منتظم ومثلث متساوى الاضلاع فى محيط دائرة معلوم لذلك يفرض ان المسئلة محلولة وان ا ب ضلع من اضلاع المسدس المطلوب



فاذا وصل النصفا قطرين ام , ب م كان المثلث ام ب متساوى الاضلاع لان الزاوية ام ب سدس اربع زوايا قائمة فاذا جعلت الزاوية القائمة وحدة تكون ام ب = ٤ق/٦ = ٢ق/٣ والزاويتان الاخرتان ا ب م , ب ا م من المثلث عينه يكون مجموعهما مساويا ٢ - ٢ق/٣ أى ٤ق/٣ وحيث انهما متساويتان تكون كل منهما مساوية ٢ق/٣ وحينئذٍ يكون المثلث ا ب م متساوى الاضلاع وبناءً عليه يكون ضلع المسدس المرسوم فى الدائرة مساويا لنصف القطر

ومن هنا ينتج انه لرسم مسدس منتظم فى محيط دائرة معلوم يلزم نقل نصف القطر على محيط الدائرة ست مرات وبذا يصير الرجوع الى النقطة التى صار الابتدأ منها

ومن بعد رسم المسدس ا ب ح ء ه و فى الدائرة اذا وصل مستقيم بين كل رأسين متفاوتتين برأس واحدة حدث المثلث ا ح ه المتساوى الاضلاع

(تنبيه) الشكل ا ب ح م متوازى الاضلاع بل هو معين لان ا ب = ب ح = ح م = ام

فبذا يكون (قضية ١٥ مقالة ٣) مجموع مربعى القطرين وهو $\overline{\text{اح}}^{\text{٢}} + \overline{\text{ب م}}^{\text{٢}}$ مساوياً لمجموع مربعات اضلاعه الذى هو ٤ $\overline{\text{اب}}^{\text{٢}}$ أو ٤ $\overline{\text{ب م}}^{\text{٢}}$ واذا طرح $\overline{\text{ب م}}^{\text{٢}}$ من الطرفين يبقى $\overline{\text{اح}}^{\text{٢}} = \text{٣} \; \overline{\text{ب م}}^{\text{٢}}$ واذن يكون

$$\frac{\overline{\text{اح}}^{\text{٢}}}{\overline{\text{ب م}}^{\text{٢}}} = \frac{\text{٣}}{\text{١}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{اح}}{\text{ب م}} = \sqrt{\frac{\text{٣}}{\text{١}}}$$

ومن ذا يعلم ان نسبة ضلع المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم فى الدائرة الى نصف القطر كنسبة الجذر التربيعى للعدد ٣ الى الواحد

القضية الخامسة

مسئلة

المطلوب رسم معشر منتظم فى الدائرة

لذلك يفرض ان المسئلة محلولة وان ا ب ضلع من اضلاع المعشر المطلوب فالزاوية المركزية ا م ب تكون مساوية $\frac{\text{٤ق}}{\text{١٠}}$ أى $\frac{\text{٢ق}}{\text{٥}}$ وعلى ذلك يكون مجموع الزاويتين م ب ا، م ا ب مساوياً ٢ق − $\frac{\text{٢ق}}{\text{٥}}$ أى $\frac{\text{٨ق}}{\text{٥}}$ واذن تكون كل منهما مساوية $\frac{\text{٤ق}}{\text{٥}}$

واذا مد المستقيم ب ه المنصف للزاوية م ب ا فان المثلث ه م ب يكون متساوى الساقين لان كلاً من الزاويتين ه م ب، م ب ه تساوى $\frac{\text{٢ق}}{\text{٥}}$ فاذن يكون م ه = ه ب ويكون المثلث ب ا ه متساوى الساقين أيضاً لانه من كون الزاوية ه ب ا مساوية $\frac{\text{٢ق}}{\text{٥}}$ والزاوية ب ا ه مساوية

$\frac{٢ق}{٥}$ تكون الزاوية ا ه ب مساوية $\frac{٢ق}{٥}$ وعلى هذا يكون

ا ب = ب ه = ه م

ثم انه على مقتضى (قضية ١٨ مقالة ٣) يحدث

$$\frac{ب م}{ا ب} = \frac{ه م}{ا ه}$$

أو

$$\frac{ا م}{م ه} = \frac{م ه}{ا ه}$$

ومن ذا يشاهد ان النصف قطر ا م منقسم فى النقطة ه الى نسبة ذات وسط وطرفين وان القطعة الكبرى م ه تساوى ضلع المعشر المرسوم فى الدائرة

(نتيجه ١) اذا وصل مستقيم بين كل رأسين متفاوتين برأس واحدة من رؤس المعشر المنتظم حدث المخمس المنتظم ا د ه ح ى

(نتيجه ٢) اذا كان ا ب ضلع المعشر وكان ا ل ضلع المسدس فان القوس ب ل يكون بالنسبة لمحيط الدائرة $\frac{١}{٦}$ - $\frac{١}{١٠}$ أى $\frac{١}{١٥}$ وعلى ذلك يكون الوتر ب ل ضلعاً لذى الخمسة عشر ضلعا المنتظم ويشاهد فى آن واحد ان القوس د ل ثلث د ب

(تنبيه ١) ضلع المعشر المرسوم فى الدائرة التى نصف قطرها نق يساوى هذا المقدار نق ($\frac{\sqrt{٥}-١}{٢}$)

(تنبيه ٢) متى رسم المضلع المنتظم فى الدائرة وقسم كل من الاقواس المو‍تره

باضلاعه الى قسمين متساويين وحدث الاوتار الموترة لانصاف هذه الاقواس حدث من هذه الاوتار مضلع منتظم عدد اضلاعه ضعف عدد اضلاع المضلع الاول ومن ذا يشاهد ان المربع يمكن استعماله فى رسم المضلعات المنتظمة التى عدد اضلاعها على التعاقب ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، .... الخ وان المسدس المنتظم يستعمل فى رسم المضلعات المنتظمة التى عدد اضلاعها على التعاقب ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ... الخ وان المعشر يستعمل للاشكال التى اضلاعها ٢٠ ، ٤٠ ، ٨٠ ، .... الخ وذو الخمسة عشر ضلعا فى الاشكال التى اضلاعها ٣٠ ، ٦٠ ، ١٢٠ ، .... الخ

(قد اعتقد مدة طويلة من الزمن فى ان هذه الاشكال هى التى يمكن رسمها دون غيرها فى الدائرة بطرق الهندسة العادية أو بحل معادلات الدرجة الاولى والثانية وهو أمر يرجع الى الاول لكن المعلم غوص قد برهن فى كتاب له سنة ١٨٠١ من الميلاد على أنه يمكن بمثل هذه الطرق رسم المضلع المنتظم الذى عدد اضلاعه ١٧ وعلى العموم المضلع المنتظم الذى عدد اضلاعه 2^n+1 حالة ما يكون 2^n+1 عددا أوليا)

القضية السادسة

مسئله

المعلوم مضلع منتظم مرسوم فى محيط الدائرة مثل ا ب حـ ء .... الخ والمطلوب رسم مضلع منتظم على محيط الدائرة عينه يكون مشابها للاول

لذلك يمد المماس ع ط من النقطة ق التي هي منتصف القوس ا ب فهذا المماس يكون موازيا ا ب (قضية ١٠ مقالة ٢) ثم يجري العمل كذلك في منتصف كل من الاقواس الاخرى ب د , د ى , ... فهذه المماسات بتقاطعها يحدث منها المضلع المنتظم ع ط ى ك ... الخ المرسوم خارج الدائرة الذي يشابه المضلع المرسوم في الدائرة

اذ من الواضح اولا ان الثلاثة نقط م , ب , ط على مستقيم واحد لان المثلثين م ق ط , م ط ه مشتركان في الوتر م ط وفيهما الضلع م ق = م ه وبذا يكونان متساويين (قضية ١٩ مقالة ١) ومن تساويهما تكون الزاوية ق م ط = ط م ه ومن ذا يعلم ان الخط م ط يمر بالنقطة ب التي هي منتصف القوس ق ه وبمثل هذا يشاهد ان النقطة ى على امتداد م د وهكذا لكن حيث ان ع ط يوازي ا ب وان ط ى يوازي ب د فتكون الزاوية ع ط ى = ا ب د وكذلك الزاوية ط ى ك = ب د ى وهكذا وبذا تكون زوايا المضلع المرسوم على الدائرة مساوية لزوايا المضلع المرسوم فيها وزيادة على ذلك فانه بسبب المستقيمات المتوازية المذكورة يحدث

$$\frac{ع ط}{ا ب} = \frac{م ط}{م ب} , \frac{ط ى}{ب د} = \frac{م ط}{م ب}$$

واذن يكون

$$\frac{ع ط}{ا ب} = \frac{ط ى}{ب د}$$

ولكن حيث ان ا ب = ب د يكون ع ط = ط ى وبمثل هذا يعلم ان ط ى = ى ك وهكذا

فعلى ذلك تكون اضلاع المضلع المرسوم على الدائرة متساوية وبذا يكون منتظما مشابها للمضلع الداخل

(نتيجه ١) وبالعكس اذا كان المعلوم المضلع ع ط ے ک ..... لخ المرسوم على الدائرة وكان الامر لازما لجعله واسطة فى رسم المضلع ا ب د ..... لخ داخل الدائرة يكفى فى ذلك ان تمد الخطوط م ع , م ط ,..... لخ الى رؤس المضلع المعلوم وهى ع ,ط ,..... لخ فهذه الخطوط تقطع محيط الدائرة فى النقطة ا , ب , د , ... لخ واذا وصلت الاوتار ا ب , ب د , ... لخ تكون منها المضلع الداخل المطلوب ويمكن ايضا فى هذه الحالة توصيل الاوتار ف ه , ه ع ,..... لخ بين نقط التماس ف ,ه , ع ,..... لخ فيحدث من هذه الاوتار مضلع مرسوم فى الدائرة مشابه أيضا للمضلع المرسوم عليها

(نتيجه ٢) بالبناء على ما ذكر يمكن ان يرسم على دائرة مفروضة جميع المضلعات المنتظمة المعلوم طرق رسمها فى الدائرة وعكسا

القضية السابعة
نظريه

مساحة المضلع المنتظم تساوى حاصل ضرب محيطه فى نصف نصف قطر الدائرة المرسومة فيه

ليكن ع ط ے ک ..... لخ مضلعا منتظما فمساحة المثلث ع م ط تساوى ع ط × $\frac{1}{2}$ م ف ومساحة المثلث م ط ے تساوى ط ے × $\frac{1}{2}$ م ه وحيث كان م ه = م ف تكون مساحة المثلثين معا تساوى (ع ط + ط ے) × $\frac{1}{2}$ م ف

وبالاستمرار على هذا المنوال بالنسبة للمثلثات الاخرى يشاهد ان مساحة مجموع المثلثات كلها اى مساحة المضلع بتمامه تساوى حاصل ضرب مجموع القواعد ح ط , ط ى , ى ك ,.... الخ اى محيط المضلع فى ½ م ف أى فى نصف نصف قطر الدائرة المرسومة فى المضلع

(تنبيه) النصف قطر م ف المخصوص بالدائرة المرسومة فى المضلع انما هو العمود المنزل من المركز على احد الاضلاع ويسمى احيانا بارتفاع المضلع المذكور

القضية الثامنة
نظرية

النسبة بين محيطى المضلعين المنتظمين المتساويين فى عدد الاضلاع كالنسبة بين نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين عليهما وكالنسبة بين نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين فيهما ايضاً والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعى نصفى القطرين المذكورين

ليكن ا ب ضلعاً من احد المضلعين الجارى اعتبارهما , م مركزه , م ا نصف قطر الدائرة المرسومة عليه , م ى نصف قطر الدائرة المرسومة فيه وليكن ا َب َ ضلع المضلع الأخر المشابه له , م َ مركزه , م َا َ نصف قطر الدائرة المرسومة عليه , م َى َ نصف قطر الدائرة المرسومة فيه

فالنسبة بين محيطى هذين المضلعين كالنسبة بين الضلعين ا ب , ا َب َ لكن حيث ان الزاويتين ا , ا َ متساويتان بما ان كلاً منهما نصف زاوية المضلع وان الامر كذلك بالنسبة للزاويتين ب , ب َ فيكون المثلثان ا ب م , ا َب َم َ متشابهين وكذا

المثلثان ا ء م , اَ ءَ مَ واذن يحدث

$$\frac{\text{اب}}{\text{اَبَ}} = \frac{\text{ام}}{\text{اَمَ}} = \frac{\text{مء}}{\text{مَءَ}}$$

وعلى ذلك تكون النسبة بين محيطى المضلعين كالنسبة بين نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين عليهما وهما ام , اَمَ وكالنسبة بين نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين فيهما وهما م ء , مَ ءَ

وحيث ان نسبة سطحى المضلعين المذكورين كنسبة مربعى الضلعين المتناظرين اب , اَبَ تكون نسبة هذين السطحين ايضاً كنسبة مربعى نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين على المضلعين وهما ام , اَمَ وكنسبة مربعى نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين فى المضلعين وهما م ء , مَ ءَ

تعاريف

(١) الكمية المتغيرة هى كمية تأخذ مقادير مختلفة متعاقبة

(٢) النهاية مقدار ثابت تقرب منه كمية متغيرة على قدر مايراد بدون ان تصل اليه

(٣) علم الحساب وهو علم الهندسة فيهما امثلة عديده من الكميات المتغيرة ومن النهايات التى تقرب منها هذه المتغيرات

فمن المعلوم مثلاً ان مقدار زاوية مضلع منتظم عدد اضلاعه ن هو

$$\frac{\text{٢ق} - \text{٤}}{\text{ن}} = \text{٢ق} - \frac{\text{٤}}{\text{ن}}$$

فاذا فرض ان عدد الاضلاع يزداد الى مالانهاية له شوهد ان مقدار الزاوية يزداد أيضاً

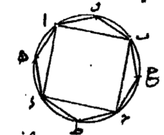
وحيث انه يمكن جعل م كبيراً بالكفاية بحيث ان الكسر يصير أصغر من كل كمية مفروضة فينتج من ذلك ان المقادير المتعاقبة لزاوية المضلع المنتظم نهايتها قائمتان

وأيضاً اذا نصف مستقيم مثل اب بالنقطة د ثم نصف المستقيم د ب بالنقطة د' ب د'' د' د ـــــــــ ا وهكذا فان نهاية الخطوط اد ، اد' ، اد'' ، .... الخ هي الخط اب

ويمكن ضرب أمثال على ذلك بلا نهاية

(٤) من البديهي انه اذا كانت نهايات العوامل أ' ، ب' ، د' المخصوصة بحاصل ضرب هي ا ، ب ، د فان نهاية الحاصل أ' × ب' × د' تكون ا × ب × د

(٥) ليكن ا ب د ى مضلعاً مرسوماً في دائرة فمحيط هذا المضلع يكون أصغر من طول



محيط الدائرة لان كل ضلع أصغر من القوس المقابل له فاذا اخذ على الاقواس ا ب ، ب د ، .... الخ نقط تقسيم مثل و ، ع ، ط ، هـ ووصلت الأوتار ا و ، و ب ، ب ع ، .... الخ حدث مضلع ثان مرسوم في الدائرة محيطه اكبر من محيط الأول واذا اخذت نقط تقسيم اخرى متوسطة يحدث مضلع ثالث محيطه اكبر من محيط الثاني وهلم جرا وبذا تأخذ محيطات هذه المضلعات في القرب من طول محيط الدائرة ومن هنا تؤخذ القضية الآتية التي تعتبرها من الامور البديهية وهي انه اذا كان عدد اضلاع المضلع كبيراً بالكفاية فان الفرق بين طول محيط الدائرة ومحيط المضلع يكون

اقل من اى كمية مفروضة وهذا يعبر عنه بالعبارة الآتية وهى

ان طول محيط الدائرة هو النهاية التى يقرب منها محيط مضلع مرسوم فيه عدد اضلاعه يزداد من غير حد

ويشاهد ايضاً ان سطوح المضلعات المتعاقبة التى كل منها اقل من سطح الدائرة تفترق من هذا السطح قليلاً فقليلاً وبالتسليم فى كون الفرق يمكنه ان يصير أصغر من كل مقدار مفروض يستنتج الامر الآتى وهو

ان مساحة الدائرة هى النهاية التى يقرب منها مساحة مضلع مرسوم فى الدائرة عدد اضلاعه يزداد من غير حد

(٦) ينتج بداهة مما ذكر ان كل خاصية تصدق على محيط أو على سطح مضلع مرسوم فى الدائرة مهما كان عدد اضلاعه يمكن تطبيقها على طول محيط هذه الدائرة أو على سطحها

مثال ذلك انه من كون محيط أى مضلع مرسوم فى الدائرة أصغر من محيط أى مضلع آخر احاط بمحيط هذه الدائرة يستنتج ان طول محيط الدائرة نفسه أصغر من محيط أى مضلع يحيط به

ومتى رسم فى دائرة مضلعات منتظمة عدد اضلاعها آخذ فى التزايد فان انصاف أقطار الدوائر المرسومة فى هذه المضلعات تأخذ فى التزايد لان اضلاع المضلعات تصير صغيرة زيادة فزيادة وبذا تأخذ فى التباعد عن المركز وزيادة على ذلك فان نهاية الانصاف

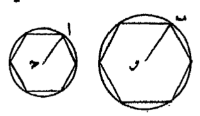
أقطار المذكورة هي نصف قطر الدائرة المرسومة على المضلعات المذكورة

وذلك لانه اذا كان اب احد اضلاع المضلع المنتظم المرسوم في الدائرة وكان م د نصف قطر الدائرة المرسومة فيه , م ب نصف قطر الدائرة المرسومة عليه فانه من المثلث م ب د يحدث م ب − م د < د ب

وحيث ان د ب الذى هو نصف اب يمكنه ان يصير صغيرًا على قدر ما يراد فمن باب أولى يمكن أن م ب − م د يصير أصغر من كل كمية مفروضة

القضية التاسعة
نظرية

النسبة بين محيطى أى دائرتين كالنسبة بين نصفى قطريهما والنسبة بين سطحى الدائرتين كالنسبة بين مربعى نصفى قطريهما



برهان الأمر الاول أن يرسم في محيطى الدائرتين الذى نصفا قطريهما و ب , د ا مضلعات منتظمان متشابهان

وليكن ع , عَ محيطى هذين المضلعين ولنجعل نق , نقَ رمزين للنصفى قطرين و ب , د ا ثم نجعل م , مَ رمزين لمحيطى الدائرتين المرسومتين عليهما فعلى مقتضى القضية الثامنة يحدث

$$\frac{ع}{عَ} = \frac{نق}{نقَ}$$

وحيث ان هذا التناسب صحيح مهما كان عدد اضلاع المضلعين فانه يمكن تطبيقه

أيضاً على طولي محيطي الدائرتين وحينئذٍ يحدث

$$\frac{م}{م'} = \frac{نق}{نق'} \qquad (١)$$

وبرهان الامر الثانى ان يجعل ى , ى' رمزين لسطحي الدائرتين المذكورتين , س , س' رمزين لسطحي المضلعين المنتظمين المتشابهين المرسومين فيهما فعلى مقتضى القضية الثامنة يحدث

$$\frac{س}{س'} = \frac{نق^٢}{نق'^٢}$$

وحيث ان هذا التناسب صحيح مهما كان عدد اضلاع المضلعين فانه يحدث

$$\frac{ى}{ى'} = \frac{نق^٢}{نق'^٢}$$

(تنبيه) من المتساوية (١) يستخرج أيضاً

$$\frac{م}{٢نق} = \frac{م'}{٢نق'}$$

ومن ذا يعلم ان نسبة محيط الدائرة الى قطره مقدارها ثابت بالنسبة لجميع محيطات الدوائر وهذه النسبة التى يرمز لها فى العادة بحرف ط هى أصمة لا يمكن حسابها الا بوجه التقريب ومقدارها بالاعشارى هو

ط = لج ٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣٢

وعما قريب نأتى بطريقة ابتدائية لحساب مقدار ط بوجه التقريب ومعرفة العدد ط تؤذن بتقدير طول محيط الدائرة المعلوم نصف قطره لانه من المتساوية $\frac{م}{٢نق} = ط$ يستنتج $م = ٢ ط نق$

(مثال ذلك) ليكن نق = ٥٣,٨١٢م فاذا خصص المقدار التقريبى ٣,١٤

للنسبة ط يحدث

م = ٢ × ٣،١٤ × ١٨،٣٥ = ١١٥،٢٣٨٠ م

تعريف

الأقواس المتشابهة والقطاعات المتشابهة والقطع المتشابهة ما كانت مقابلة لزوايا مركزية متساوية

القضية العاشرة

نظرية

النسبة بين القوسين المتشابهين اب ، ءه كالنسبة بين نصفي قطرين اح ، وء والنسبة بين القطاعين المتشابهين ب ح ا ، ء و ه كالنسبة بين مربعي النصفي قطرين المذكورين

اما الأمر الأول فهو لانه على مقتضى (قضية ١٨ مقالة ٧) يحدث

$$\frac{\text{قوس اب}}{\text{محيط اح}} = \frac{\text{ح}}{\text{٤ ق}}$$

وأيضاً $\frac{\text{قوس ءه}}{\text{محيط وء}} = \frac{\text{و}}{\text{٤ ق}}$

فبسبب تساوي الزاويتين ح ، و يحدث

$$\frac{\text{قوس اب}}{\text{على قوس ءه}} = \frac{\text{محيط اح}}{\text{محيط وء}} = \frac{\text{اح}}{\text{وء}}$$

واما الأمر الثاني فهو لانه على مقتضى (قضية ١٨ مقالة ٤) ايضاً يحدث

$$\frac{\text{قطاع احب}}{\text{دائرة اح}} = \frac{\text{ح}}{\text{٤ ق}} ، \frac{\text{قطاع ءوه}}{\text{دائرة ءو}} = \frac{\text{و}}{\text{٤ ق}}$$

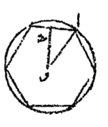
فمن هذا يحدث

$$\frac{\text{قطاع ا د ب}}{\text{قطاع ى و هـ}} = \frac{\text{دائرة ا د}}{\text{دائرة ى و}} = \frac{\overline{\text{د ا}}^{2}}{\overline{\text{ى و}}^{2}}$$

القضية الحادية عشر

نظرية

مساحة الدائرة تساوى حاصل ضرب محيطها فى نصف نصف قطرها



لانه اذا رسم فى الدائرة التى نصف قطرها و ا مضلعاً منتظماً وجعل ع رمزاً لمحيط هذا المضلع وس رمزاً لسطحه يحدث

$$\text{س} = \text{ع} \times \tfrac{1}{2}\ \text{و د}$$

وحيث ان مساحة الدائرة نهاية لمساحات المضلعات المنتظمة المرسومة فيها التى عدد اضلاعها يأخذ فى التزائد من غير حد فانه يتحصل على مساحة الدائرة بالبحث عن النهاية التى يقرب منها الحاصل ع × ½ و د وحيث ان نهاية ع هى محيط و ا وان نهاية و د هى و ا فيحدث

$$\text{سطح الدائرة و ا} = \text{محيط و ا} \times \tfrac{1}{2}\ \text{و ا}$$

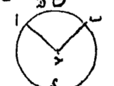
(تنبيه) اذا جعل نو رمزاً لنصف قطر الدائرة كان محيط نو = ٢ ط نق

واذن يكون سطح الدائرة = ٢ ط نو × $\frac{\text{نو}}{2}$ = ط نو²

(مثال) اذا كان نو = ٣م وجعل ط = ٣٫١٤١٥ كان

سطح الدائرة = ٢٠٨٠٣٧٣٥ متر مربع

(نتيجه) سطح القطاع يساوى حاصل ضرب قوسه فى نصف نصف قطره



لان نسبة القطاع ا حـ ب الى الدائرة الكلية كنسبة القوس اهـ ب الى المحيط ا ب ء (قضية ١٨ مقاله ٢)

أو كنسبة اهـ ب × ½ احـ الى ا ب ء × احـ/٢

وحيث ان الدائرة الكلية = ا ب ء × ½ احـ تكون مساحة القطاع احـ ب = ا م ب × ½ احـ

(مثال) ليكن احـ = ٢٠م ولنفرض ان القوس ا م ب يحتوى على ٦٠° فلايجاد طول هذا القوس يوضع التناسب

$$\frac{\text{قوس ا م ب}}{٢\,ط\,نو} = \frac{٦٠}{٣٦٠}$$

ومنه يحدث

$$\text{قوس ا م ب} = \frac{٢\,ط\,نو × ٦٠}{٣٦٠} = \frac{ط\,نو}{٣} = \frac{ط × ١٢}{٣} = ٤\,ط$$

وبذا يكون

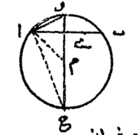
$$\text{قطاع ا حـ ب} = ٤\,ط × ٦ = ٢٤\,ط = ٣٧٥٫٩٦٠٢\,م^٢$$

في مسائل تختص بالمضلعات المنتظمه وفى تعيين نسبة محيط الدائرة الى قطره

القضية الثانية عشر

مسئلة

المعلوم من مضلع منتظم مرسوم في الدائرة ضلعه اب ومن الدائرة نفسها نصف قطرها م و والمطلوب حساب الضلع او من المضلع المنتظم المرسوم في هذه الدائرة الذى عدد اضلاعه ضعف عدد اضلاع الاول



ليكن $\text{اب} = \text{ح}$ ، $\text{م و} = \text{نق}$ ، $\text{او} = \text{ى}$ ولنصل اع ، ام لحن المثلث واع القائم الزاوية يحدث

$$\overline{\text{او}}^2 = \text{وع} \times \text{وس} \quad \text{أو} \quad \text{ى}^2 = 2\,\text{نق} \times \text{وس}$$

وحيث ان $\text{وس} = \text{وم} - \text{مس} = \text{نق} - \text{مس}$

وانه مع ذلك يحدث من المثلث ام س القائم الزاوية ما هو آت

$$\text{مس} = \sqrt{\text{نق}^2 - \overline{\text{اس}}^2} = \sqrt{\text{نق}^2 - \frac{\text{ح}^2}{4}}$$

فيكون

$$\text{وس} = \text{نق} - \sqrt{\text{نق}^2 - \frac{\text{ح}^2}{4}}$$

واذن يكون

$$\text{ى}^2 = 2\,\text{نق} \times \left(\text{نق} - \sqrt{\text{نق}^2 - \frac{\text{ح}^2}{4}}\right) \qquad (1)$$

وبالعكس يمكن حساب ح متى علم ى ولذا يكفى حل المعادلة (١) بالنسبة الى ح فبذا يحدث

$$\text{ح}^2 = \frac{\text{ى}^2(4\,\text{نق}^2 - \text{ى}^2)}{\text{نق}^2} \qquad (2)$$

وللتمثيل على القانون (١) نفرض ان ح هو ضلع المسدس أى ان $\text{ح} = \text{نق}$ فبالنسبة لضلع ذى الاثنى عشر ضلع المنتظم المرسوم في الدائرة يحدث

$$\text{ء} = \sqrt{٢\,\text{نق}\left(\text{نق} - \sqrt{\text{نق}^٢ - \frac{\text{نق}^٢}{٤}}\right)} = \sqrt{٢\,\text{نق}^٢\left(١ - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)} = \text{نق}\sqrt{٢ - \sqrt{٣}}$$

وللتمثيل على القانون (٢) نجعل ء مساوياً لضلع المعشر ونبحث عن ضلع المخمس المنتظم فيحدث $\text{ء} = \frac{\text{نق}(\sqrt{٥} - ١)}{٢}$

ومن ذا يستنتج

$$\text{ح}^٢ = \frac{\frac{\text{نق}^٢(٦ - ٢\sqrt{٥})}{٤}\left[٤\,\text{نق}^٢ - \frac{\text{نق}^٢(٦ - ٢\sqrt{٥})}{٤}\right]}{\text{نق}^٢} = \frac{\text{نق}^٢}{٤}(١٠ - ٢\sqrt{٥})$$

ومنه يستخرج

$$\text{ح} = \frac{\text{نق}}{٢}\sqrt{١٠ - ٢\sqrt{٥}}$$

(تنبيه) اذا جمع مربع نصف القطر على مربع ضلع المعشر وجد انه

$$\text{نق}^٢ + \frac{\text{نق}^٢(٦ - ٢\sqrt{٥})}{٤} = \frac{\text{نق}^٢(١٠ - ٢\sqrt{٥})}{٤}$$

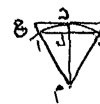
اى يساوى مربع ضلع المخمس المنتظم

وعلى ذلك يكون ضلع المخمس المنتظم المرسوم فى الدائرة كناية عن وتر مثلث قائم الزاوية ضلعا قائمته نصف القطر وضلع المعشر

القضية الثالثة عشر

مسئله

المعلوم ضلع مضلع منتظم ونصف قطر الدائرة المرسومة عليه والمطلوب ايجاد ضلع المضلع المشابه له المرسوم على الدائرة المذكورة



لكن اب = ح , م ا = نو , ع و = س لكن تشابه المثلثين ع م و , ا م ب يحدث هذا التناسب

$$\frac{ع و}{ا ب} = \frac{م ع}{م ا}$$

ومن جهة اخرى يحدث

$$\frac{م ع}{م ا} = \frac{م د}{م ل}$$

وبسبب النسبة المشتركة يحدث

$$\frac{ع و}{ا ب} = \frac{م د}{م ل}$$

أو

$$\frac{س}{ح} = \frac{نو}{م ل} \qquad (1)$$

ومع ذلك فانه من المثلث ام ل القائم الزاوية يحدث

$$م ل = \sqrt{م ا^2 - ا ل^2} = \sqrt{نو^2 - \frac{ح^2}{4}}$$

فاذن يكون

$$\frac{س}{ح} = \frac{نو}{\sqrt{نو^2 - \frac{ح^2}{4}}}$$

ومن ذا يحدث

$$س = \frac{2 ح نو}{\sqrt{4 نو^2 - ح^2}}$$

القضية الرابعة عشر

مسئله

المعلوم الضلع اب من مضلع منتظم عدد اضلاعه ى وكذا النصف قطر م ب المخصوص بالدائرة المرسومة عليه والمطلوب ايجاد سطح هذا المضلع

لكن $اب = ح$ ، $م ا = نو$ ولنجعل $س$ رمزاً لسطح المضلع المذكور فيحدث

$$س = ء ح \times \frac{م ل}{٢}$$

وحيث ان $م ل = \sqrt{نو^٢ - \frac{ح^٢}{٤}} = \frac{١}{٢}\sqrt{٤ نو^٢ - ح^٢}$

يكون

$$س = \frac{ء ح \sqrt{٤ نو^٢ - ح^٢}}{٤}$$

(مثال) اذا كان المطلوب ايجاد سطح المسدس المنتظم يكون $ح = نو$ ، $ء = ٦$ وعلى هذا يكون

$$س = ٦ \frac{نو \sqrt{٤ نو^٢ - نو^٢}}{٤} = \frac{٣ نو^٢ \sqrt{٣}}{٢}$$

(تنبيه) يمكن ايضاً بالمعاليم عينها حساب سطح المضلع المنتظم المرسوم فى الدائرة الذى عدد اضلاعه ٢ ء

لانه اذا كان ه منتصف القوس $اب$ ووصل $اه$ فان سطح المضلع المبحوث عنه الذى نرمز له بالرمز $سَ$ يتركب من مثلثات عددها ٢ ء كل منها يساوى $ام ه$

وحيث ان $ام ه = م ه \times \frac{ال}{٢} = \frac{نو \times ح}{٤}$

يكون

$$سَ = ٢ ء \times \frac{نو \times ح}{٤} = \frac{ء نو ح}{٢}$$

وللتمثيل على ذلك نبحث على سطح ذى الاثنى عشر مضلع المنتظم المرسوم فى الدائرة فيحدث

ح = نو , ى = ٦

واذن يكون

س = ٦ نو^٢ / ٢ = ٣ نو^٢

القضية الخامسة عشر

مسئله

المعلوم النصفا قطرين م ى = نو , م ا = نوَ المخصوصين بالدائرتين المرسومتين خارج وداخل مضلع منتظم والمطلوب حساب النصفى قطرين بو , بوَ المخصوصين بالدائرتين المرسومتين خارج وداخل مضلع منتظم مساوٍ للمضلع الاول فى طول المحيط وضعفه فى عدد الاضلاع

ليكن ب ى ضلع المضلع المنتظم المفروض , م مركزه ولنمد النصف قطر م ا المخصوص بالدائرة المرسومة فى المضلع حتى يتقابل مع محيط الدائرة المرسومة عليه فى النقطة ح ثم نوصل المستقيمين ب ح , ى ح فالزاوية ب ح ى تكون هى الزاوية المركزية للمضلع المبحوث عنه لانها نصف الزاوية ب م ى وزيادة على ذلك اذا انزل العمود م ك على ب ح ومد ك ه موازياً ب ى فان ك ه يكون نصف ب ى ويدل على ضلع المضلع المستجد ويكون ح ك نصف

قطر الدائرة المرسومة على هذا المضلع ويكون ع ـه نصف قطر الدائرة المرسومة فيه

وحيث انه مما ذكر يحدث ـه ع = ـه١ / ٢ = (م ـه + ـه١) / ٢

فيكون

نق١َ = (نق + نقَ) / ٢ (١)

وحيث انه من المثلث م ـه ك ـه القائم الزاوية يحدث

ـه كَ² = ـه م × ـه ع

فيكون

نق١ = √(نق × نق١َ) = √(نق × (نق + نقَ) / ٢) (٢)

(تنبيه) يشاهد بالراحه اما من الشكل و اما من القانونين ان نق١َ اكبر من نقَ وانه بالعكس نق١ أصغر من نق بحيث انه في المضلع المستجد يكون الفرق بين نصف قطر الدائرة المرسومة عليه ونصف قطر الدائرة المرسومة فيه أقل مما في المضلع الاول

واذا بالطريقة عينها صار تحويل المضلع الثاني الى مضلع ثالث ثم صار تحويل الثالث الى رابع وهلم جرا فانه يتوصل الى مضلع يكون فيه الفرق بين نصف قطر الدائرة المرسومة عليه ونصف قطر الدائرة المرسومة فيه أصغر من اى كمية مفروضة وذلك لانه من المثلث ب م ا يحدث

ب م − م ا < ا ب

أو نق − نقَ < ب ا

وحيث ان ب ا نصف ضلع المضلع وان هذا الضلع يمكن جعله اصغر من أى مقدار مفروض متى ضوعف عدد الاضلاع من غير حد فيمكن ان نق - نقَ يصير اصغر من أى مقدار مفروض

القضية السادسة عشر

مسئلة

المطلوب ايجاد مقدار تقريبي للنسبة الكائنة بين محيط الدائرة وقطره

لذلك يقال انه على مقتضى تعريف هذه النسبة يحدث .

$$\text{ط} = \frac{\text{محيط نق}}{\text{٢ نق}} \qquad (١)$$

وقد ثبت ان

$$\text{ط} = \frac{\text{دائرة نق}}{\text{نق}^{٢}} \qquad (٢)$$

فمن هنا تنتج اربع طرق لايجاد مقدار ط

لانه باعتبار القانون (١) يمكن حساب نصف القطر متى علم محيط الدائرة او حساب محيط الدائرة متى علم نصف القطر وباستعمال القانون (٢) يمكن التعرض لايجاد سطح الدائرة متى علم نصف القطر او حساب نصف القطر متى علمت مساحة الدائرة فنشرح الطريقتين الاولتين ونتعرض اولا لحساب نصف قطر الدائرة التى طول محيطها ٤

ولذا نرسم مربعا ونتخذ ضلعه وحدة فبذا يصير طول محيط هذا المربع مساويا ٤ وليكن نق و نقَ نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين خارج وداخل المربع المذكور فيحدث

$$\text{نق} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} \quad , \quad \text{نقَ} = \frac{١}{٢}$$

وهذا المربع يمكن تحويله الى مثمن منتظم مساوٍ له فى طول المحيط فاذا صار استعمال قانونى المسئلة المتقدمة وجد أن مقدارى نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين خارج وداخل هذا المثمن هنا

$$\text{نق}_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{8}} \quad \text{و} \quad \text{نقَ}_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{4}$$

وبمثل ذلك يجرى حساب نصفى القطرين نق و نقَ المخصوصين بذى الستة عشر ضلع المنتظم الذى طول محيطه ٤ وبالاستمرار على هذا المنوال يتوصل الى مضلع محيطه لم يزل مساويا ٤ ونصفا قطريه نقن و نقَن يختلفان بقليل على قدر ما يراد

وحيث ان محيطى الدائرتين المرسومتين بالنصفى قطرين نقن و نقَن احدهما أكبر من ٤ والثانى اصغر من ذلك فيكون نصف قطر محيط الدائرة المساوى ٤ محصوراً بين نقن و نقَن ويمكن الحصول عليه بقدر ما يراد من التقريب

واذا صار تقدير النصفى قطرين نقن و نقَن بالاعشارى فمن البديهى ان الارقام الاعشارية المشتركة بين المقدارين تكون من مقدار النصف قطر المبحوث عنه

والجدول الآتى فيه المقادير المتعاقبة لنصف قطر الدائرة المرسومة فى الخارج ولنصف قطر الدائرة المرسومة فى الداخل بالنسبة للمضلعات التى عدد اضلاعها ٤ و ٨ و ١٦ و ... و ٨١٩٢

عدد الاضلاع	نصف قطر الدائرة المرسومة فى الداخل	نصف قطر الدائرة المرسومة فى الخارج
٤	بوَ ١ = ٠/٥٠٠٠٠٠٠٠٠	بو ١ = ٠/٧٠٧١٠٦٨
٨	بوَ ٢ = ٠/٦٠٣٥٥٣٤	بو ٢ = ٠/٦٥٣٢٨١٥
١٦	بوَ ٣ = ٠/٦٢٨٤١٧٤	بو ٣ = ٠/٦٤٠٧٢٨٩
٣٢	بوَ ٤ = ٠/٦٣٤٥٧٣١	بو ٤ = ٠/٦٣٧٦٤٣٥
٦٤	بوَ ٥ = ٠/٦٣٦١٠٨٢	بو ٥ = ٠/٦٣٦٨٧٥٤
١٢٨	بوَ ٦ = ٠/٦٣٦٤٩١٩	بو ٦ = ٠/٦٣٦٦٨٣٦
٢٥٦	بوَ ٧ = ٠/٦٣٦٥٨٧٨	بو ٧ = ٠/٦٣٦٦٣٥٧
٥١٢	بوَ ٨ = ٠/٦٣٦٦١١٧	بو ٨ = ٠/٦٣٦٦٢٣٧
١٠٢٤	بوَ ٩ = ٠/٦٣٦٦١٧٧	بو ٩ = ٠/٦٣٦٦٢٠٧
٢٠٤٨	بوَ ١٠ = ٠/٦٣٦٦١٩٢	بو ١٠ = ٠/٦٣٦٦١٩٩
٤٠٩٦	بوَ ١١ = ٠/٦٣٦٦١٩٥	بو ١١ = ٠/٦٣٦٦١٩٧
٨١٩٢	بوَ ١٢ = ٠/٦٣٦٦١٩٦	بو ١٢ = ٠/٦٣٦٦١٩٦

وعلى هذا يكون مقدار نصف قطر محيط الدائرة المساوى ٤ هو ٠/٦٣٦٦١٩٦
وبناء عليه يكون مقدار نسبة محيط الدائرة الى القطر مساويا

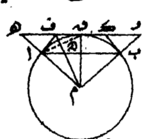
$$\frac{٤٠٠٠٠٠٠٠٠}{١٢٧٣٢٣٩٢} = ٣/١٤١٥٩٢٦$$

ومقدار ط التقريبى الذى كان وجده ارشميدس هو $\frac{٢٢}{٧}$ والمعلم متيوس
وجد لهذه النسبة المقدار الآتى الاكثر فى التقريب وهو $\frac{٣٥٥}{١١٣}$

القضية السابعة عشر

مسئلة

المعلوم من مضلعين منتظمين متشابهين احدهما مرسوم فى الدائرة والآخر مرسوم عليها المحيطاهما $\bar{ح}$ ، ح والمطلوب حساب المحيطين $\bar{ح}$ ، ح المخصوصين بالمضلعين المنتظمين المرسومين داخل وخارج الدائرة عينها وعدد اضلاعهما ضعف عدد اضلاع المضلعين المفروضين



ليكن اب ، هو ضلعى المضلعين اللذين محيطاهما $\bar{ح}$ ، ح وليكن ى عدد اضلاع كل منهما ولنصل الوتر اه ونرسم المماسين اف و ب ك من النقطتين ا ، ب ثم نصل المستقيم م ف فالمستقيمان اه و ف ك يكونان هما ضلعا المضلعات المرسومين داخل وخارج الدائرة اللذين عدد اضلاع كل منهما ٢ى ومحيطاهما $\bar{ح}$ ، ح

اذا تقرر ذلك فانه على مقتضى القضية الثامنة يحدث

$$\frac{\bar{ح}}{ح} = \frac{\text{م هـ}}{\text{م ا أو م ه}}$$

وحيث ان م ف هو منصف الزاوية هـ م ه يحدث ايضاً

$$\frac{\text{ف هـ}}{\text{ف ه}} = \frac{\text{م هـ}}{\text{م ه}}$$

ولداعى النسبة المشتركة يحدث

$$\frac{\bar{ح}}{ح} = \frac{\text{ف هـ}}{\text{ف ه}}$$

٤٢ م هنكس

ومن ذا ينتج ان $\frac{ح + ح}{ح_{٢}} = \frac{هـ ه}{ف م ٢ و ف ك}$

وحيث ان المستقيمين هـ ه و ف ك يدخلان فى المحيطين ح , ح مراراً عددها ٢ فيحدث

$$\frac{ح + ح}{ح_{٢}} = \frac{ح}{ح_{١}}$$

ومن هذا يحدث $ح_{١} = \frac{ح ح_{٢}}{ح + ح}$

ولاجل حساب $\bar{ح}_{١}$ يلاحظ ان المثلثين ف ه هـ , هـ ا ه متساويا الزوايا فبذا يكونان متشابهين ويحدث منهما هذا التناسب

$$\frac{ا ه}{ا ه} = \frac{ف ه}{ه هـ}$$

وحيث ان المستقيمين ا ه , ا ه يدخلان فى $\bar{ح}$, $\bar{ح}$ مراراً عددها ٢ وان المستقيمين ف ه و ه هـ يدخلان فى $ح_{١}$, $\bar{ح}_{١}$ مراراً عددها ٤ فيكون

$$\frac{ح_{١}}{\bar{ح}_{١}} = \frac{\bar{ح}_{١}}{\bar{ح}}$$

ومن هذا يحدث

$$\bar{ح}_{١} = \sqrt{ح_{١} \times \bar{ح}} \quad (٢)$$

(نتيجه) هذان القانونان يؤذنان بحساب النسبة ط على قدر ما يراد من التقريب لانه اذا اخذت دائرة نصف قطرها الواحدة الخطية ورسم داخلها وخارجها مربعات محيطاهما ٤ $\sqrt{٢}$, ٨ فانه يمكن استعمال القانونين (١) , (٢) فى حساب محيطى المثمنين المنتظمين المرسومين داخل وخارج الدائرة المذكورة وبواسطة هذين المثمنين يستحصل على محيطى ذوى الستة عشر ضلع وهكذا وحيث قد علم انه فى هذه العمليات المتعاقبة تقرب محيطات المضلعات

المذكوره من طول محيط الدائرة فانه يمكن حساب هذا المحيط مع التقريب
الثانى وبقسمته على ٢ يحدث العدد ط

تمت المقالة الرابعة


Bibliotheca Alexandrina
0479508